

数字游乐场系列

数字游乐场



一本可以动手玩的数学书

第一册 · 第 1 - 4 章

小 π 与橘猫欧拉 著

第 1 章 对数的认知

第 2 章 圆周运动和三角函数

第 3 章 导数的意义及常用求导法则

第 4 章 揭开自然常数 e 的神秘面纱

配套交互网页：用浏览器打开 [index.html](#) 进入游乐场

数字游乐场 · 第一册 · 第 1 - 4 章

序	为什么这本书不让你背公式
第 1 章	对数的认知
1.1	高斯的一记神配对
1.2	越变越小的饼干
1.3	方块堆里的秘密
1.4	素数的筛子与森林
回	四种看数字的眼光
第 2 章	圆周运动和三角函数
2.1	摩天轮与单位圆
2.2	把圆展开成波浪
2.3	旋转的加法
2.4	影子乐队
回	圆、波与旋转
第 3 章	导数的意义及常用求导法则
3.1	从平均速度到瞬时速度
3.2	切线与导函数
3.3	求导积木
3.4	链式法则与最优
回	变化、斜率与最优
第 4 章	揭开自然常数 e 的神秘面纱
4.1	利滚利： e 从哪里来
4.2	e 的两种面孔
4.3	e^x ：导数等于自己
4.4	e 与圆：欧拉公式
回	增长、旋转与最美的公式
附	挑战答案与公式速查

共 4 章 · 16 节 · 16 个可动手玩的网页，入口见 [index.html](#)。

—— 开始之前

为什么这本书不让你背公式

给 9 - 14 岁的数字游乐指南

阅读指南

三个约定



小 π 第一次翻开数学书的时候，打了一个很长的哈欠。

书上的公式长得像一排排压扁的蚂蚁： $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 。老师说要背下来，考试要考。小 π 背了，也考了，但过了一个暑假，公式就像沙子一样从指缝里漏光了。

后来小 π 遇到了一只橘猫。

橘猫叫欧拉，喜欢睡在摊开的数学书上，也喜欢在别人快要放弃的时候，用尾巴尖敲敲某个数字。

欧拉说：“公式不是用来背的。公式是一张被压扁的地图。你要做的，是把它重新展开，看看它原本长什么样。”

这本书的三个约定

第一，先动手，再动脑。 每一节都有一个可以真正上手玩的网页。你可以拖滑杆、点按钮、把图形拆开再拼起来。玩过之后，公式会自己“长”出来。

第二，先猜，再证明。 猜错完全不丢人。数学家的日常就是：猜一个，被自己推翻，再猜一个。书里会留出“你觉得呢”的时刻，别急着翻答案。

第三，允许看不懂。 第一遍看不懂某一段，就跳过去玩网页，玩完再回来。很多数学不是“读懂”的，是“看懂了”之后才读得懂的。

每一节长什么样

你会反复遇到这几种小牌子：

-  **故事**：小 π 和欧拉在游乐场里遇到的一个问题。
-  **动手玩**：点开网页，亲手试一试。
-  **发现**：玩着玩着，你会注意到的那件事。
-  **小心坑**：几乎每个人都会踩的坑，提前帮你标出来。
-  **挑战**：三道小题，答案在书后的附录里。

怎么使用这本书

你可以只读文字，也可以把这本书当成一张“游乐场地图”：

1. 浏览器里打开 `index.html`，这是游乐场大门。
2. 点“翻开第 1 章”，进入完整的书页。
3. 读到  的牌子时，点开对应的交互网页，玩够了再回来。
4. 想打印或存成 PDF，在书页右上角点“打印”。

给陪读的大人：这本书里的公式都给了推导，但推导是“看得见”的推导。如果孩子只想玩网页，也很好——先有画面，再有符号，顺序反了也没关系。

欧拉在书的第一页踩了一个梅花印，然后说：

“数学不是一门需要记性的学科。它是一门需要想象力的学科。现在，我们去游乐场吧。”

对数的认知

数是怎么排队的

数列

配对

求和

素数

先澄清一件事：这一章的“对数”，不是 $\log$ 。

不是那个让高中生头疼的“对数函数”，而是“**对数字的认识**”。如果你第一眼把它看成了 $\log$ ，说明你的数学雷达很灵敏——但请把它关掉，这一章我们用不上它。

数字有四种长相

从小学到现在，你见过很多数字。但你可能没有注意过，同一串数字，可以有四种完全不同的“长相”。

第一种长相：排队。 1、2、3、4……它们排着队往前走。你想知道前 100 个加起来是多少，就面临一个“队伍太长”的问题。

第二种长相：折叠。 有些数字不是加出来的，而是乘出来的：1、2、4、8、16……每往后一步，就折叠一次。它要么缩得很小，要么炸得很大。

第三种长相：形状。 1、4、9、16……这些数可以摆成正方形；1、3、6、10……可以摆成三角形。数字不只是数量，它还是面积、是边框、是一层一层的积木。

第四种长相：原子。 2、3、5、7、11、13……它们没法再被拆成更小的整数乘积。所有整数都由它们“化合”而成。它们叫素数，是数字世界的原子。

这一章，我们就去这四个地方各玩一趟。

本章地图

- **1.1 高斯的一记神配对：**从 1 加到 100，怎样在几秒钟内算完？为什么奇数加起来正好是一个正方形？
- **1.2 越变越小的饼干：**无限多个数相加，为什么可能等于一个有限的数？公比的绝对值小于 1，到底意味着什么？
- **1.3 方块堆里的秘密：** $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 和 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 有什么画面？四次方的公式又是怎样被严格“锻造”出来的？
- **1.4 素数的筛子与森林：**怎样快速判断一个数是不是素数？怎样把 N 以内的素数一网打尽？素数的分布，究竟有没有规律？

每一节都配了一个可以上手玩的网页。别客气，先玩。

出发前，欧拉的问题

欧拉趴在游乐场门口的栏杆上，尾巴一甩，问了三个问题：

1. 把 1 到 100 加起来，你打算加多久？
2. $0.999\cdots$ 一直写下去，它到底等不等于 1？
3. 素数的个数是有限的还是无限的？

小 π 想了很久，说：“我好像一个都答不上来。”

欧拉很满意：“很好。带着问题进去，比带着答案进去好玩多了。”

高斯的一记神配对

从 1 加到 100，只用一分钟

首尾配对

三角形数

等差数列

🕒 约 9 分钟

动手玩 · 约 8 分钟



高斯的魔法楼梯

(在网页版打开可动手玩)

拖动滑杆改变楼梯层数，把首尾数字配成彩虹，或者复制一份拼成矩形，亲眼看见 $n(n+1)/2$ 。

开学第一天，数学老师想给全班一个下马威。

他在黑板上写下一行字：

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = ?$$

然后说：“算不完不许回家。”

小 π 刚拿起笔，就听见隔壁桌传来一声长长的哈欠。那是欧拉——一只混进教室的橘猫，正趴在窗台上，尾巴懒洋洋地垂着。

“你完蛋了，”小 π 小声说，“一百个数，加到天黑也算不完。”

欧拉睁开一只眼：“谁让你真的一个一个加了？”

一、先别急着加

大多数人的第一反应是硬加： $1+2=3$ ， $3+3=6$ ， $6+4=10$ ……算到六十多就开始怀疑人生，而且只要中间错一步，后面全错。

欧拉用爪子把 1 到 100 写成了两行：

1, 2, 3, $\dots$, 98, 99, 100

100, 99, 98, $\dots$, 3, 2, 1

“现在，把上下两个数一对一地加起来。”欧拉说。

小 π 试了试：

$1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, $\dots$

每一对都是 101。

一共 100 对，所以两行加起来是 100×101 。但我们只要其中一行的和，于是除以 2：

$$1 + 2 + \dots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

小 π 只用了一分钟。

二、把楼梯搬进游乐场

欧拉带小 π 去了数字游乐场的第一站。那里有一座奇怪的楼梯：第一级高 1 格，第二级高 2 格，第三级高 3 格……第 n 级高 n 格。

“这叫**三角形数**，”欧拉说，“把每一级的高度加起来，就是 $1 + 2 + \dots + n$ 。”

打开 1.1 的游乐场，你会看到两种玩法。

玩法一：配对彩带。 最矮的一级和最矮……不对，是最矮的一级和最高的一级，被同一根彩带连起来。第二矮的和第二高的连起来，以此类推。每一对的高度和，都是 $n + 1$ 。

玩法二：拼成矩形。 把整座楼梯复制一份，旋转 180° ，正好能补进原来的楼梯里，拼成一个宽 n 、高 $n + 1$ 的矩形。楼梯占了矩形的一半。

于是：

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

这个式子，就是等差数列求和公式。

三、奇数为什么拼成正方形

游乐场里还有第二座设施。

小 π 看到一堆小方块，边长从 1 开始一级一级地长。欧拉说：“每次长一层，你猜要添多少块？”

- 从 1×1 长到 2×2 ，添 3 块；
- 从 2×2 长到 3×3 ，添 5 块；
- 从 3×3 长到 4×4 ，添 7 块。

全是奇数。

为什么会这样？因为边长为 k 的正方形有 k^2 块，边长为 $k - 1$ 的正方形有 $(k - 1)^2$ 块，两层相差：

$$k^2 - (k - 1)^2 = 2k - 1$$

差值永远是奇数。所以“奇数”就是正方形一层一层的“年轮”。

把前 n 个奇数加起来，正好是边长为 n 的正方形：

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

欧拉打了个滚：“所以，奇数不是‘奇怪的数’，是‘正方形的边框’。”

四、公式是怎么被证明的

现在我们把这两件事写成严格的推导。

◆ 推导一：配对法

设 $S = 1 + 2 + \cdots + n$ 。

把和倒过来写一遍：

$$S = n + (n - 1) + \cdots + 2 + 1$$

两式相加，每一列都是 $n + 1$ ，一共 n 列：

$$2S = n(n + 1)$$

所以 $S = \frac{n(n+1)}{2}$ 。

这个推导对偶数 n 和奇数 n 都成立，不需要分情况。之前“ n 为奇数时中间会落单”的担心，被“两行相加”的技巧直接绕过去了。

◆ 推导二：矩形法

把三角形数摆成楼梯，复制一份旋转 180° ，拼成 $n \times (n+1)$ 矩形。矩形面积是 $n(n+1)$ ，楼梯占一半，所以和是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 。

同一个公式，一条代数路，一条几何路。两条路都通向同一个地方。

◆ 一般情况：等差数列

如果数列不是从 1 开始，而是从 a_1 开始，每次加 d ，最后一项是 a_n ，那么：

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

也就是“**首项加末项，乘项数，除以 2**”。

小 π 问：“那 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ 也能用这个公式吗？”

当然能。首项 1，末项 $2n-1$ ，项数 n ：

$$S = \frac{(1 + 2n - 1) \times n}{2} = n^2$$

和前面的正方形结论一模一样。

五、小心三个坑

⚠ 坑一：项数不是末项

从 1 加到 100，项数是 100；但从 3 加到 100，项数是 98，不是 100。用公式前先数清楚“有几个数”。

⚠ 坑二：奇数 n 的中间项

如果你用“首尾配对”的直观方法， n 是奇数时中间会剩下一个数，它是 $\frac{n+1}{2}$ 。别把它忘了。用“两行相加”的写法可以避免这个麻烦。

⚠ 坑三：公式里的 n 是正整数

这个公式对正整数 n 成立。如果你把 n 换成小数，左边的“1 到 n ”就说不清了。数学公式有它的使用说明书。

六、高斯的传说与真实

传说高斯 9 岁时，老师布特纳让全班算 1 到 100 的和。高斯很快写下 5050，老师惊呆了。

这个故事流传很广，但细节未必全真。可以确定的是：高斯后来成了“数学王子”，而这个“首尾配对”的想法，确实是数学里最漂亮的小技巧之一。

欧拉补充：“顺便说，古埃及人和巴比伦人早就会算等差数列了。高斯不是第一个想到的人，但他是把它用得最出神入化的人之一。”

七、挑战

三关小挑战

- ① 算 $1 + 2 + \cdots + 99$ 。
- ② 算 $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$ 。
- ③ 如果 $1 + 2 + \cdots + n = 2016$, n 是多少?

▼ 看答案

- ① $\frac{99 \times 100}{2} = 4950$ 。
- ② 提取公因数 2: $2(1 + 2 + \cdots + 50) = 2 \times \frac{50 \times 51}{2} = 2550$ 。
- ③ $n(n+1) = 4032$ 。估算: $63 \times 64 = 4032$, 所以 $n = 63$ 。

再想一步

如果把 1 到 100 的和写成 $\frac{100 \times 101}{2}$, 你能不能用同样的思路, 解释为什么“两个相邻三角形数加起来是一个正方形数”?

也就是: $T_n + T_{n-1} = n^2$ 。提示: 把两座楼梯拼一拼。

一句话记住

加法可以折叠成乘法, 数列可以折叠成面积。

下一站，我们去吃一块永远吃不完的饼干。

越变越小的饼干

等比数列与无穷的握手

等比数列

错位相减

无穷级数

🕒 约 11 分钟

动手玩 · 约 10 分钟



正方形越切越小

从一块正方形开始，每刀剪掉剩下的一半，看 $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ 怎样一步步填满 1；再用错位相减把公式推出来。

(在网页版打开可动手玩)

小 π 得到了一块巨大的饼干。

第一天，他吃掉了整块饼干的一半。第二天，他吃掉了剩下的一半。第三天，他又吃掉了剩下的一半……

“照这样吃下去，”小 π 舔着手指说，“我是不是永远都吃不完？”

欧拉趴在饼干盒上，慢悠悠地说：“你确实永远会剩一点点。但你吃掉的饼干总量，是有限的。”

小 π 愣住了：“无限次地吃，怎么会是有限的总量？”

欧拉说：“因为你每次吃的都越来越少，而且少得很有规律。”

欧拉把饼干换成了一个正方形，带小 π 去了 1.2 的游乐场。第一刀竖着剪掉一半，第二刀横着剪掉剩下的一半，第三刀再竖着剪……每一刀都只剪掉“剩下部分”的一半。剪下来的小块留在原位，一块块把正方形填得越来越满，却总还留着一小块白色。

“如果一直剪下去呢？”小 π 问。

“剩下的会缩成一个点。”欧拉说，“但剪下来的总面积，正好是一整块。”

一、什么叫等比数列

看这串数：

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

每一项都是前一项乘以 $\frac{1}{2}$ 。这个固定的乘数，叫**公比**，通常记作 q （这本书里我们有时也写成 x ）。

等比数列的通项公式是：

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

这里 a_1 是首项， q 是公比， n 是项数。

和等差数列不同，等比数列不是“排队往前走”，而是“折叠”：每走一步，就把上一步折叠一次。 q 大于 1 时越折越大， q 小于 1 时越折越小。

二、先算有限项

在讨论“无限”之前，我们先老老实实算前 $N+1$ 项的和：

$$S_N = 1 + x + x^2 + \dots + x^N$$

这个和在生活里很常见。比如 $x=0.5$ 时，它就是小 π 吃掉饼干的总量（第一次吃 $1/2$ ，第二次吃 $1/4$ ……）。

欧拉教了小 π 一个魔法，叫**错位相减**。

第一步，把 S_N 写出来：

$$S_N = 1 + x + x^2 + \cdots + x^N$$

第二步，两边同时乘以 x ：

$$xS_N = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{N+1}$$

第三步，把两个式子上下对齐，相减。

你会发现，中间那些项一模一样： x 和 x 抵消， x^2 和 x^2 抵消……最后只剩下两头：

$$S_N - xS_N = 1 - x^{N+1}$$

左边提取公因数：

$$(1 - x)S_N = 1 - x^{N+1}$$

只要 $x \neq 1$ ，两边就可以同时除以 $1 - x$ ：

$$S_N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$$

这就是等比数列的有限项求和公式。



为什么叫“错位”

第二行比第一行“往右错了一格”。正是因为错开这一格，相同的项才能对齐、抵消。数学里很多巧妙的证明，都是靠“换个位置看”。

三、把 N 放到无穷大

现在回到小 π 的饼干。

取 $x = \frac{1}{2}$ ，前 $N+1$ 项的和是：

$$S_N = \frac{1 - (1/2)^{N+1}}{1 - 1/2} = 2 - \frac{1}{2^N}$$

N 越大， $\frac{1}{2^N}$ 越小。 $N=10$ 时它约等于 0.00098， $N=20$ 时约等于 0.00000095。

它越来越接近 0。

所以 S_N 越来越接近 2，但永远比 2 小一点点。我们把这个“越来越接近的目标”叫作**极限**：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$$

更一般地，只要 $|x| < 1$ ，当 N 越来越大时， x^{N+1} 会趋近于 0，于是：

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

这就是**无穷等比级数**的求和公式。

小 π 盯着这个式子看了半天：“所以，我吃掉的总量正好是 2 块饼干？可我开始只有 1 块啊。”

欧拉说：“你把‘整块’和‘吃掉的部分’搞混了。你吃掉的，是 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ ，这里面并没有那个开头的 1。用公式算： $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots) - 1 = 2 - 1 = 1$ 。所以你吃掉的正好是一整块——只是在任何有限的天数里，你总还会剩一点点。”

小π 这才明白：“永远吃不完”说的是过程，“总量是一整块”说的是极限。两句话可以同时成立。

⚠ 首项到底是谁

$1 + x + x^2 + \dots$ 的首项是 1，不是 x 。如果题目是 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ ，那首项是 $\frac{1}{2}$ ，不能用“ $1/(1-x)$ ”直接套，要先提取首项。

四、为什么必须 $|x| < 1$

欧拉在纸上画了三个例子。

$x = 1$: $1 + 1 + 1 + \dots$ ，越加越大，没有尽头。公式的分母 $1 - x$ 变成 0，直接失效。

$x = 2$: $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ ，每一项都在翻倍。只要加几十项，就能超过全世界所有的麦粒。

$x = -1$: $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ ，在 1 和 0 之间来回跳，永远定不下来。

只有当 $|x| < 1$ 时，每一项才越来越小， x^{N+1} 才趋近于 0，公式才成立。这个条件不是“附加要求”，它是公式能成立的**根本原因**。

五、棋盘上的爆炸

说到 $x=2$ ，就不能不提那个著名的棋盘故事。

传说一位国王要奖赏国际象棋的发明者。发明者说：“我只要麦子。第一格放 1 粒，第二格放 2 粒，第三格放 4 粒，每一格都是前一格的两倍，放满 64 格就好。”

国王觉得这要求太便宜了，一口答应。

结果算下来，第 64 格要放 2^{63} 粒，约等于 9.22×10^{18} 粒。前 64 格加起来是 $2^{64} - 1$ 粒，重量约 4610 亿吨——是全世界一年小麦产量的好几百倍。

💡 翻倍为什么吓人

人的直觉擅长“线性”：1、2、3、4，慢慢来。但翻倍是“指数”：前 10 格加起来才 1023 粒，前 20 格加起来就超过 100 万，前 30 格加起来超过 10 亿。指数增长前半段温柔，后半段失控。

同一个公式 $1 + x + x^2 + \dots$ ，在 $|x| < 1$ 时收敛到一个有限的数，在 $x \geq 1$ 时爆炸。一个小小的绝对值，划分了两个世界。

六、0.999.....到底等不等于 1

小 π 一直有个疑问：“0.999……无限循环下去，是不是永远比 1 小一点点？”

欧拉说：“用等比数列算一算。”

$$0.999 \dots = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \dots$$

这是首项 0.9、公比 0.1 的等比数列：

$$S = \frac{0.9}{1 - 0.1} = \frac{0.9}{0.9} = 1$$

所以 $0.999 \dots = 1$ ，不是“约等于”，是“等于”。它们只是同一个数的两种写法，就像 $\frac{1}{2}$ 和 0.5 一样。

小 π 有点不服气：“可是它看起来就是小一点啊。”

欧拉说：“‘看起来’不是数学。数学看的是：这两个数之间，你能不能找到另一个数？找不到，它们就是同一个数。”

七、小心三个坑

⚠ 坑一：公比不能为 1

$1 + 1 + 1 + \cdots$ 没有有限和，公式里的分母 $1 - x$ 也会变成 0。看到公式，先检查 $x \neq 1$ 。

⚠ 坑二：无穷项不能随便“移项”

有限项可以随便加、减、乘，无穷项要先确认它收敛。 $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ 如果硬套公式，会算出 $\frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$ ，但这个级数根本不收敛。公式有它的适用范围。

⚠ 坑三：项数数错

从 x^0 到 x^N 一共是 $N+1$ 项，不是 N 项。错位相减时，最后剩下的那一项是 $-x^{N+1}$ ，别漏掉。

八、挑战

三关小挑战

- ① 算 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$ 。
- ② 算 $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{10}$ 。
- ③ 如果 $S = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ ，且 $|x| < 1$ ，S 等于多少？

▼ 看答案

- ① 首项 1，公比 $\frac{1}{3}$ ，所以 $S = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$ 。
- ② 这是首项 1、公比 2、共 11 项的等比数列，用有限公式：
 $\frac{1-2^{11}}{1-2} = 2^{11} - 1 = 2047$ 。
- ③ 公比是 $-x$ ，所以 $S = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$ 。

再想一步

如果每天吃掉剩下的 $\frac{2}{3}$ ，而不是一半，吃掉的饼干总量是多少？“永远吃不完”和“总量有限”还能同时成立吗？

一句话记住

无限不一定是无穷大；“越来越小”是收敛的钥匙。

方块堆里的秘密

平方和、立方和与四次方

平方和

立方和

望远镜求和

四次方

⌚ 约 14 分钟

动手玩 · 约 12 分钟



网格里数正方形

(在网页版打开可动手玩)

在一张 $n \times n$ 的方格纸里，按大小数出所有正方形；再看正方形长大时镶上的边框，怎样一层层长出立方数。

欧拉把小 π 带到了游乐场的积木区。

地上铺着一张巨大的方格纸，旁边堆着一箱小方块。欧拉说：“给你一个任务：数一数这张 8×8 的方格纸里，一共有多少个正方形。”

小 π 信心满满：“1、2、3、4……这有什么难的？”

十分钟后，小 π 数乱了。

欧拉用尾巴尖敲了敲纸面：“别一个一个数。按大小分类。”

一、网格里有多少个正方形

先看边长是 1 的小正方形。 8×8 的格子，每一格都是一个小正方形，一共 $8 \times 8 = 8^2$ 个。

再看边长是 2 的正方形。它的左上角可以放在哪里？横向有 7 个位置，纵向也有 7 个位置，所以有 7^2 个。

边长是 3 的正方形，左上角有 6×6 个位置，所以有 6^2 个。

一直数到边长是 8 的大正方形，只有 1^2 个。

于是总数是：

$$8^2 + 7^2 + 6^2 + \cdots + 2^2 + 1^2$$

倒过来写，就是：

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 8^2$$

“所以，”欧拉说，“数正方形，其实就是在算平方和。”

打开 1.3 的游乐场，你可以亲手一格一格地数，看每种大小的正方形怎样被高亮出来，累计的数字怎样一点点长到公式预测的总数。

二、平方和公式

我们希望找到一个公式：

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = ?$$

先看几个小数据：

- $n = 1$: 1
- $n = 2$: $1 + 4 = 5$
- $n = 3$: $1 + 4 + 9 = 14$
- $n = 4$: $1 + 4 + 9 + 16 = 30$

这些数字能看出规律吗？直接看不出来。但数学家有一个办法：**找差分**。

考虑相邻两个立方数的差：

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

这个式子把 k^2 孤立出来了。把 k 从 1 到 n 全部写出来，然后加起来：

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3] = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n$$

左边是一个“望远镜”： $2^3 - 1^3$ 、 $3^3 - 2^3$ 、 $4^3 - 3^3$ ……中间全抵消，只剩下 $(n+1)^3 - 1$ 。

而 $\sum k = \frac{n(n+1)}{2}$ 我们已经知道了。于是：

$$(n+1)^3 - 1 = 3S + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

其中 S 就是平方和。解出 S ：

$$S = \frac{(n+1)^3 - 1 - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n}{3}$$

把右边通分化简（只是代数运算，没有新想法），得到：

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

用 $n=8$ 验证： $\frac{8 \times 9 \times 17}{6} = 204$ 。小 π 在游乐场里数出来的，正好也是 204。

为什么要从三次方借力

平方和是一次方和（ $\sum k$ ）的“升级版”。想求它的公式，就去构造一个差分，让 k^2 出现在展开式里。 $(k+1)^3 - k^3$ 正好能做到这件事。

! 平方和不是和的平方

$(1 + 2 + \cdots + n)^2$ 不是 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 。前者是“先加再平方”，后者是“先平方再加”。 $n=2$ 时，前者是 9，后者是 5。别混。

三、立方和：正方形的边框

现在把积木换个摆法。

正方形数 $T_k = \frac{k(k+1)}{2}$ 是三角形数。用 T_k 当边长画正方形，它的面积是 T_k^2 。

当边长从 T_{k-1} 长到 T_k 时，新镶上去的 L 形边框有多少块？

用面积相减：

$$T_k^2 - T_{k-1}^2 = (T_k - T_{k-1})(T_k + T_{k-1})$$

而 $T_k - T_{k-1} = k$ ， $T_k + T_{k-1} = k^2$ 。所以：

$$T_k^2 - T_{k-1}^2 = k \times k^2 = k^3$$

边框正好是 k^3 块。

把 $k=1$ 到 n 的边框全部加起来，正方形从 $T_0 = 0$ 长到 T_n ：

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = T_n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

这就是**立方和公式**，也叫尼科马库斯定理。它有一个非常漂亮的读法：

前 n 个立方数的和，等于前 n 个自然数之和的平方。

验证一下： $n = 4$ 时， $1 + 8 + 27 + 64 = 100$ ，而 $T_4 = 10$ ， $10^2 = 100$ 。对上了。

在游乐场里，你每点亮一层，就会看到一圈边框被高亮，右上角写着 k^3 。那些数字不是算出来的，是“长”出来的。

四、四次方：严格推导

平方和、立方和都有了几何画面。那四次方呢？

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = ?$$

这一节，我们不做“跳步”的推导，一步一步来。方法还是望远镜，只是这次要升到五次方。

◆ 第一步：构造差分

用二项式定理展开 $(k+1)^5$ ，再减去 k^5 ：

$$(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$$

这里的系数 5、10、10、5、1，来自帕斯卡三角形第 5 行。

◆ 第二步：把所有 k 加起来

把 $k=1$ 到 n 的式子全部相加。左边是望远镜，中间抵消：

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^5 - k^5] = (n+1)^5 - 1$$

右边逐项求和：

$$(n+1)^5 - 1 = 5 \sum k^4 + 10 \sum k^3 + 10 \sum k^2 + 5 \sum k + n$$

◆ 第三步：代入已知的幂和

我们已经知道：

$$\sum k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

把它们代进去，右边就只剩一个未知数 $\sum k^4$ ：

$$(n+1)^5 - 1 = 5 \sum k^4 + 10 \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 10 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

◆ 第四步：解出四次方和

把已知项移到左边，两边除以 5：

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{(n+1)^5 - 1 - 10 \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 10 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n}{5}$$

接下来是纯代数：把 $n(n+1)$ 提出来，通分，展开，合并同类项。过程有点长，但没有一步需要“灵感”。整理的结果是：

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

用 $n=5$ 验证： $\frac{5 \times 6 \times 11 \times (75+15-1)}{30} = \frac{5 \times 6 \times 11 \times 89}{30} = 979$ 。

而 $1 + 16 + 81 + 256 + 625 = 979$ 。对上了。

公式不是猜的

很多书直接给出四次方公式，让你背。但你看，它是从“五次方差分”一步步推出来的。公式的每一个因子，都能在推导里找到出处。

五、公式流水线

把上面的方法抽象一下，你会得到一个“公式流水线”：

1. 想求 $\sum k^p$ ，就构造差分 $(k+1)^{p+1} - k^{p+1}$ 。
2. 展开，右边会出现 k^p 、 k^{p-1} 、……、常数。
3. 把 k 从 1 到 n 求和，左边望远镜式抵消成 $(n+1)^{p+1} - 1$ 。
4. 把低次幂和代进去，解出 $\sum k^p$ 。
5. 通分化简。

用这台流水线，你可以继续造出五次方和、六次方和……只是公式会越来越长。

伯努利数

数学家后来发现，这一长串公式可以用一套统一的系数打包起来，叫伯努利数。它的本质，仍然是“望远镜 + 二项式”，只是把重复的代数劳动压缩成了一个记号。

六、三种“和”的对照

和	公式	几何画面
$1 + 2 + \cdots + n$	$\frac{n(n+1)}{2}$	楼梯拼成矩形
$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	网格里数正方形
$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$	$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$	正方形边框一层层长大
$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$	$\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$	五次方差分的望远镜

看出规律了吗？ p 次方和的公式，是一个 $p+1$ 次多项式。而且它总是被 $n(n+1)$ 整除——因为前 n 项和的“形状”里，天然带着这两个因子。

七、挑战

🎯 三关小挑战

- ① 10×10 的网格里一共有多少个正方形？
- ② 算 $1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3$ 。
- ③ 算 $1^4 + 2^4 + \cdots + 10^4$ 。

▼ 看答案

- ① $1^2 + \cdots + 10^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$ 。
- ② $T_{10} = 55$, $55^2 = 3025$ 。
- ③ 直接套公式： $\frac{10 \times 11 \times 21 \times (300 + 30 - 1)}{30} = \frac{10 \times 11 \times 21 \times 329}{30} = 25333$ 。

再想一步

用 $(k+1)^3 - k^3$ 的望远镜，自己动手把平方和公式推一遍。你会发现，整个推导只用了三个东西：二项式展开、望远镜抵消、一次方程。

一句话记住

把“很多项”折叠成“两项”，是求和问题的万能钥匙。

素数的筛子与森林

找出数字世界的原子

素数判定

埃氏筛

素数分布

乌岚螺旋

🕒 约 15 分钟

动手玩 · 约 14 分钟



素数的筛子与森林

(在网页版打开可动手玩)

用试除法快速判定素数，亲手筛出 N 以内的素数，再从 $\pi(n)$ 、间隔和乌岚螺旋里偷看素数分布的秘密。

游乐场的最后一站，是一片森林。

森林里的树按照编号排列：1 号、2 号、3 号、4 号……小 π 发现，有些编号的树特别“孤僻”，比如 2、3、5、7、11、13。它们除了 1 和自己，没有别的因数。

“这些数叫**素数**，”欧拉说，“它们是数字世界的原子。所有整数，都能由素数乘出来。”

小 π 问：“那 1 呢？”

“1 不是素数。”欧拉说，“因为它太特殊了——如果 1 算素数，那么 6 可以写成 2×3 ，也可以写成 $1 \times 2 \times 3$ ，还可以写成 $1 \times 1 \times 2 \times 3$ ……分解就不唯一了。数学家为了‘唯一分解’，把 1 请出了素数俱乐部。”

一、什么是素数

一个大于 1 的整数，如果只有 1 和它自己两个正因数，就叫**素数**（也叫质数）。否则叫**合数**。

- 2 是素数，而且它是唯一的偶素数。

- 3、5、7、11、13、17、19、23、29、31……都是素数。
- 4、6、8、9、10、12……都是合数。
- 1 既不是素数也不是合数，它自成一类。

素数的“原子性”体现在**算术基本定理**里：每个大于 1 的整数，都能唯一地分解成素数的乘积（不考虑顺序）。

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

这串分解是唯一的。素数就像化学里的元素，所有整数都是它们“化合”出来的。

二、怎样快速判断一个数是不是素数

最直接的办法：拿 2、3、4、5……一个个去除，看能不能整除。

但如果 n 很大，这样太慢了。数学家发现：**只需要试到 $\sqrt{n}$ 。**

为什么呢？假设 n 是合数，那么 $n = a \times b$ ，其中 a 、 b 都大于 1。如果 a 和 b 都大于 $\sqrt{n}$ ，那么 $a \times b > \sqrt{n} \times \sqrt{n} = n$ ，矛盾。

所以， a 和 b 里至少有一个不超过 $\sqrt{n}$ 。我们只要在 2 到 $\sqrt{n}$ 之间找因数，找不到， n 就一定是素数。

一个因数在门里，一个在门外

把 $\sqrt{n}$ 想成一道门。如果 n 能分解，那么总有一个因数站在门里 ($\leq \sqrt{n}$)，另一个站在门外 ($\geq \sqrt{n}$)。所以查门里就够了。

在实际计算里，还可以继续优化：

- **只试素数。** 2 的倍数、3 的倍数已经被 2 和 3 排除了，不用再试合数。
- **跳过明显的数。** 除了 2 和 3，所有素数都形如 $6k \pm 1$ （因为 $6k$ 、 $6k + 2$ 、 $6k + 3$ 、 $6k + 4$ 都能被 2 或 3 整除）。
- **大数用米勒 - 拉宾。** 判断几百位的大数时，用米勒 - 拉宾（Miller - Rabin）检测，几毫秒就能给出“几乎确定”的答案。

◆ 费马小定理与它的“骗子”

还有一个更神奇的检测方法，来自费马小定理：

如果 n 是素数，那么对任意不被 n 整除的整数 a ，都有 $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ 。

取 $a=2$ ，只需要算一次 $2^{n-1} \bmod n$ 。如果余数不是 1， n 一定不是素数。

但反过来不成立：有些合数也能让 $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ 。它们叫**卡迈克尔数**，比如：

341, 561, 1105, 1729

所以费马检测只能用来“排除合数”，不能用来“确认素数”。米勒 - 拉宾就是在它的基础上多随机几个底数，把被骗的概率降到极低。

⚠ 判定素数没有“一招鲜”

试除法适合小数，筛法适合一次性找出很多素数，米勒 - 拉宾适合大数。没有哪个方法在所有场景下都最好。数学家会按需要挑工具。

三、埃拉托斯特尼筛法

如果我们要找出 N 以内的**所有**素数，一个一个判断就太慢了。这时候要用“筛子”。

方法如下：

1. 把 2 到 N 的所有整数写下来。
2. 2 是素数，把 2 的倍数（4、6、8……）全部划掉。
3. 下一个没被划掉的是 3，它是素数，把 3 的倍数划掉。
4. 下一个没被划掉的是 5，把 5 的倍数划掉。
5. 一直重复。最后没被划掉的，就是素数。

为什么可以停？因为如果 p 是当前素数，并且 $p^2 > N$ ，那么所有小于等于 N 的 p 的倍数早就被更小的素数划掉了。所以只需要筛到 $\sqrt{N}$ 。

这个算法叫**埃拉托斯特尼筛法**，是古希腊图书馆长埃拉托斯特尼发明的，到今天还在用。

在游乐场里，你可以选一个 N ，看筛子一层层地划掉合数：先划 2 的倍数，再划 3 的倍数……最后剩下的绿色数字，就是素数。

每个合数只被划一次

划 2 的倍数时，4、6、8 都没了。轮到 3 时，从 $3^2 = 9$ 开始划就够了，因为 6 已经被划掉了。每个合数只会被它的最小素因数划掉一次，所以筛法很快。

四、素数森林的地图

筛出素数之后，小 π 把前 100 个素数写在纸上，问欧拉：“它们有规律吗？”

欧拉说：“有‘大规律’，但没有‘小公式’。我们一张一张地图看。”

◆ 地图一： $\pi(n)$ 曲线

记 $\pi(n)$ 为不超过 n 的素数个数。比如：

- $\pi(10) = 4$ (2、3、5、7)
- $\pi(100) = 25$
- $\pi(1000) = 168$
- $\pi(10^6) = 78498$

把 $\pi(n)$ 画成曲线，你会发现它一直在涨，但越涨越慢。

素数定理告诉我们：

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$$

意思是：当 n 很大时， $\pi(n)$ 和 $\frac{n}{\ln n}$ 的比值趋近于 1。

这也意味着，素数出现的“密度”大约是 $\frac{1}{\ln n}$ 。 n 越大，遇到素数的概率越小。

◆ 地图二：素数的间隔

相邻两个素数之间的差，叫**间隔**。比如 11 和 13 的间隔是 2，13 和 17 的间隔是 4。

平均间隔大约是 $\ln n$ 。 n 越大，间隔整体越大。

但有趣的是，间隔为 2 的素数对（**孪生素数**）一直出现：

$$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), \dots$$

孪生素数有没有无穷多对？这是数学界最著名的未解问题之一。2013 年，张益唐证明了“相差不超过 7000 万的素数对有无穷多对”，震惊了世界。后来这个上界被不断缩小。

◆ 地图三：乌岚螺旋

把自然数排成螺旋，再把素数涂上颜色，会看到一些斜线。

这不是巧合。螺旋对角线上的数，往往可以写成 $4k^2 \pm 2k + 1$ 这样的二次多项式。某些二次多项式“碰巧”更容易产生素数，于是就排成了线。

但注意：这些线是“图案”，不是“规律”。素数没有已知的简单生成公式。

◆ 地图四：末位数字

除了 2 和 5，所有素数都只能以 1、3、7、9 结尾。因为偶数结尾能被 2 整除，5 结尾能被 5 整除。

这四种末位出现的次数大致接近，但并不是严格平均。素数在末位上的分布，仍然有微妙的偏差。

五、素数有无穷多个

欧拉说：“最后，我教你一个两千年前的证明。”

假设素数只有有限个，把它们全部乘起来，再加 1：

$$N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k + 1$$

这个 N 除以任何一个 p_i ，都会余 1。所以它要么本身是素数，要么有一个不在名单里的素因数。无论哪种情况，都说明“素数已经列完了”是错的。

所以，素数有无穷多个。

反证法的力量

不去直接证明“有无穷多个”（这很难），而是假设“只有有限个”，然后推出矛盾。这是数学里最优雅的证明策略之一。

六、素数有什么用

小 π 问：“研究素数有什么用？”

欧拉说：“你现在上网的每一次支付，背后都站着两个很大的素数。”

RSA 加密的原理是：把两个大素数乘起来很容易，但把乘积分解回两个素数极其困难。公钥里放的是乘积，私钥里放的是那两个素数。只要素数足够大，分解就要花掉宇宙年龄那么长的时间。

除此之外，素数还出现在：

- 哈希函数和随机数生成；
- 纠错码；
- 计算机科学的算法设计；
- 甚至蝉的进化策略（有一种蝉的生命周期是 13 年或 17 年，素数年数能减少与天敌“撞车”的概率）。

素数是数学的“原子”，也是现代密码学的基石。

七、小心四个坑

⚠ 坑一：1 不是素数

1 只有一个因数，不满足“两个因数”的定义。它既不是素数，也不是合数。

⚠ 坑二：2 是素数

2 是唯一的偶素数。判断一个数是不是素数时，不要一看到偶数就排除 2。

⚠ 坑三：试除到 n 太慢

只需要试到 $\sqrt{n}$ 。判断 1000003 是不是素数，试到 1000 就够了，不用试到 100 万。

⚠ 坑四：费马检测会误判

卡迈克尔数（341、561、1105、1729……）能骗过费马小定理。所以“余数为 1”不等于“一定是素数”。

八、挑战

四关小挑战

- ① 100 以内有多少个素数？
- ② 101 是素数吗？221 是素数吗？
- ③ 100 以内有多少对孪生素数？
- ④ $2^{31} - 1 = 2147483647$ 是素数吗？

▼ 看答案

- ① 25 个。
- ② 101 是素数（试到 $\sqrt{101} \approx 10$ ，2、3、5、7 都除不尽）； $221 = 13 \times 17$ ，不是素数。
- ③ 8 对：(3,5)、(5,7)、(11,13)、(17,19)、(29,31)、(41,43)、(59,61)、(71,73)。
- ④ 是。它是一个梅森素数，也是 32 位有符号整数能表示的最大素数。

再想一步

如果素数有无穷多个，那么“相邻素数的间隔”会不会越来越大？会。但“间隔为 2 的素数对”会不会也有无穷多对？没人知道。数学的前沿，常常就藏在这种“看起来简单”的问题里。

一句话记住

素数是数字的原子，分布像森林——越走越稀，却永远走不到尽头。

四种看数字的眼光

把四座游乐设施装进口袋

总结

公式速查

方法提炼

⌚ 约 6 分钟

从游乐场出来，小 π 的口袋里多了四张票根。

欧拉问：“你学到了什么？”

小 π 想了想，说：“我学会了几个公式。”

欧拉摇头：“公式是结果。我想知道的是，你看数字的眼光有没有变。”

四种眼光

第一种：配对的眼光。看到一个“一长串”的加法，先别急着加。看看首尾能不能配对，看看能不能复制一份拼成矩形。 $1 + 2 + \cdots + n$ 的公式，就是这样“折叠”出来的。

第二种：折叠的眼光。看到乘法、看到翻倍，就要想到等比数列。公比的绝对值小于1，数列会收敛；大于等于1，就会爆炸。无限项相加不一定无穷大——这是这一章最反直觉的一件事。

第三种：形状的眼光。看到平方和、立方和，不要只看到符号。平方和是网格里的正方形，立方和是正方形边框一层层长大。数字可以变成图形，图形可以变成数字。这就是“数形结合”。

第四种：筛选的眼光。看到一类特殊的数，就要想到“如何高效地把它们找出来”。试除法、筛法、概率检测，都是“筛选”的不同层次。素数是数字的原子，而筛子是寻找原子的工具。

四张公式卡片

内容	公式	一句话画面
自然数和	$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	楼梯拼成矩形
等比有限和	$1 + x + \cdots + x^N = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$	错位相减，中间抵消
等比无限和	$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad (x < 1)$	越变越小，靠近极限
平方和	$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	网格里数正方形
立方和	$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$	正方形边框长成立方
四次方和	$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$	五次方差分的望远镜

三种方法

这一章反复出现了三个“招数”，它们比公式更值得记住：

- 1. 配对。** 把对称的东西放在一起，让复杂变简单。高斯配对、正方形边框，都是配对。
- 2. 错位相减。** 把两个“几乎一样”的式子错开一位再相减，消掉中间一大堆项。等比数列求和靠它。
- 3. 望远镜求和。** 构造 $(k+1)^{p+1} - k^{p+1}$ ，逐项相加时中间抵消，只剩两头。平方和、立方和、四次方和，都靠它。



公式会忘，方法不会

如果你忘了四次方和的公式，没关系。只要记得“构造差分 + 望远镜 + 代入低次幂和”，你随时可以重新推出来。方法是可以再生的，公式不是。

自测：你真的懂了吗

不用计算器，试着回答：

1. 为什么 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$?
2. 为什么 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2$ ，而 $1 + 2 + 4 + \cdots$ 没有有限和？
3. 为什么判断素数只需要试到 $\sqrt{n}$?
4. 四个公式里，哪几个是“面积”，哪几个是“边框”？

如果卡住了，回到对应的小节，或者再玩一遍那个网页。玩比背有用。

下一站

欧拉在游乐场的地图上，用爪子指了指远处：

“下一章，我们去看看分数。整数排完队之后，会出现一些‘不完整’的数。它们会带我们去一个更奇怪的地方——那里有不能写成分数的数，也有比任何分数都更‘密’的数。”

小 π 问：“那是什么？”

欧拉打了个哈欠：“那是下一章的事了。先把这一章的票根收好。”

本章完

第 1 章到这里结束。四座游乐设施都可以反复玩，公式也可以自己重新推。数学不是看一遍就会的，是玩很多遍才慢慢长出来的。

圆周运动和三角函数

圆上的运动怎样变成波浪

旋转

弧度

三角

波

游乐场的中央，立着一座巨大的摩天轮。

小 π 坐进 3 号座舱，摩天轮缓缓转动。他低头看着地面，发现自己的高度一会儿升高、一会儿降低，升到最高点时，风最大；转到最低点时，能看清地上的蚂蚁。

“欧拉，”小 π 问，“如果我知道自己转到了哪个角度，能不能算出我离地面多高？”

欧拉趴在旁边的座舱里，尾巴搭在窗沿上：“不光能算高度。你把高度随角度的变化画出来，会得到一条波浪。这条波浪，就是这一章的主角。”

同一个圆的四种看法

第 1 章里，数字有四种长相：排队、折叠、形状、原子。到了圆这里，同一件事也有四种看法：

- **角度。** 你转了多少度？转了多少弧度？
- **坐标。** 圆上的一个点，横坐标和纵坐标分别是多少？
- **波浪。** 点的高度随时间变化，画出来是什么样？
- **旋转。** 先转 α 再转 β ，能不能一次转完？

这四种看法，分别对应这一章的四个小节。

本章地图

- **2.1 摩天轮与单位圆：**角度、弧度，以及 $\sin$ 、 $\cos$ 到底在量什么。
- **2.2 把圆展开成波浪：**把圆周“剪开”铺平，得到正弦曲线；振幅、周期、频率、相位。
- **2.3 旋转的加法：**两个旋转合起来，为什么会得到和角公式？
- **2.4 影子乐队：**圆周运动的影子为什么会变成简谐运动？几个影子叠在一起，为什么能变成声音？

每一节都配了一个可以动手玩的网页。你会拖着角度转圈，也会真的“听见”一条波。

出发前，欧拉的问题

欧拉从口袋里掏出一张皱巴巴的纸，上面写着三个问题：

1. 为什么数学家用弧度，而不是度数？
2. 摩天轮转一圈，高度变化几次？
3. 两个相差 6 Hz 的音叉一起响，为什么声音会“嗡——嗡——”地一强一弱？

小 π 想了半天：“第二个我好像能猜到，另外两个完全没概念。”

欧拉很满意：“很好。这一章结束的时候，三个都要能答上来。”

摩天轮与单位圆

角度、弧度与 $\sin/\cos$ 的投影

弧度

单位圆

正弦

余弦

⌚ 约 10 分钟

动手玩 · 约 9 分钟



摩天轮与单位圆

(在网页版打开可动手玩)

拖动角度，看看摩天轮的座舱高度，怎样变成单位圆上的横坐标和纵坐标。

摩天轮转到 30° 的时候，小 π 离地面多高？

欧拉没有直接回答，而是在纸上画了一个圆，圆上点了一个点。“先别管摩天轮有多大。我们先看一个半径为 1 的圆，叫它**单位圆**。”

“为什么是 1？”

“因为 1 最省事。所有圆都能按比例放大缩小，先把 1 研究清楚，别的圆乘个半径就行。”

一、角度有两种写法

我们平常说“转 90° ”，用的是**角度制**：一整圈 360° ，半圈 180° 。

但数学家更爱用**弧度制**。它的定义很朴素：在圆上截一段弧，如果这段弧的长度正好等于半径，那么这段弧对应的圆心角就是 **1 弧度**。

因为整个圆的周长是 $2\pi r$ ，所以一整圈是 2π 弧度：

$$360^\circ = 2\pi \text{ 弧度}$$

于是：

$$90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

弧度不是“另一种单位”那么简单。它把角度和弧长直接绑在一起：

$$\theta = \frac{s}{r}$$

其中 s 是弧长， r 是半径。当 $r = 1$ 时，角度就等于弧长。这就是为什么微积分、物理、工程里几乎都用弧度——它让“角”和“长度”用同一把尺子。

⚠ 度数还是弧度？

同一个角，写成 30° 和写成 $\frac{\pi}{6}$ 是一回事。但 $\sin(30)$ 和 $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 不是一回事：计算器如果开在弧度模式， $\sin(30)$ 算的是 30 弧度。做题前先看模式。

二、单位圆上的坐标

把单位圆的圆心放在原点，从正 x 轴开始，逆时针转一个角 θ ，圆上会落在一个点 P 。

这个点的坐标，就是：

$$P = (\cos \theta, \sin \theta)$$

也就是说：

- 横坐标是 $\cos \theta$ ；
- 纵坐标是 $\sin \theta$ 。

这不是定义，而是“投影”的结果：从 P 向 x 轴作垂线，垂足到原点的距离就是 $\cos \theta$ ；向 y 轴作垂线，垂足到原点的距离就是 $\sin \theta$ 。

小 π 盯着图看了一会儿：“所以 $\sin$ 和 $\cos$ 不是两个新数，是圆上点的两个坐标？”

“对。”欧拉说，“三角函数不是从三角形里长出来的，是从圆上长出来的。三角形只是圆的一个切片。”

在 2.1 的游乐场里，左边是摩天轮，右边是单位圆。你拖动角度，两边的点会一起转：摩天轮的高度对应 $\sin \theta$ ，水平位置对应 $\cos \theta$ 。

三、几个必须记住的角

单位圆上最常用的几个点：

角度	弧度	$\cos \theta$	$\sin \theta$
0°	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	0	1

不用死记。画一个单位圆，把 30° 、 45° 、 60° 的点标出来，再向两条轴作垂线，坐标自然就出来了。

四、符号与象限

单位圆被两条坐标轴分成四个象限。点落在不同象限， $\sin$ 和 $\cos$ 的正负也不同：

- 第一象限（右上）： $\sin > 0, \cos > 0$
- 第二象限（左上）： $\sin > 0, \cos < 0$
- 第三象限（左下）： $\sin < 0, \cos < 0$
- 第四象限（右下）： $\sin < 0, \cos > 0$

口诀可以记成“一全正，二正弦，三正切，四余弦”，但更可靠的办法是：直接看坐标的正负。

五、最重要的恒等式

因为 $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ 在单位圆上，而单位圆的方程是 $x^2 + y^2 = 1$ ，所以：

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

这个式子叫**平方关系**。它其实是勾股定理穿了三角函数的衣服。

它还有一个直接推论：无论 θ 是多少， $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的绝对值都不会超过 1，也不会同时为 0。点永远在圆上。

六、摩天轮的高度

现在回到小 π 的问题。

假设摩天轮的中心离地面 H 米，半径 R 米，座舱从水平位置开始逆时针转 θ 。那么座舱离地面的高度是：

$$h = H + R \sin \theta$$

- 转到最高点 $\theta = \frac{\pi}{2}$: $h = H + R$;
- 转到最低点 $\theta = \frac{3\pi}{2}$: $h = H - R$;
- 转一整圈 2π : 高度回到起点。

所以摩天轮转一圈，高度完成一次完整的“高一低一高”循环。这个循环，就是下一节要展开的波浪。

一个圆，两个投影

匀速转动的点，在 x 轴上的投影做“左右摆动”，在 y 轴上的投影做“上下摆动”。这两个投影，就是 $\cos$ 和 $\sin$ 。它们不是静止的比值，而是“转出来的坐标”。

七、小心三个坑

坑一：sin 是纵坐标

$\sin \theta$ 对应 y 轴， $\cos \theta$ 对应 x 轴。很多人初学会记反。画图时先找点，再看坐标，不要背顺序。

坑二：角度和弧度的换算

$180^\circ = \pi$ ，所以“度变弧度”乘 $\frac{\pi}{180}$ ，“弧度变度”乘 $\frac{180}{\pi}$ 。别把 $\frac{\pi}{6}$ 当成 6° 。

 坑三：符号看象限

$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ 是正的， $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 是负的。不要只记数值，先判断点落在哪个象限。

八、挑战

 四关小挑战

- ① 写出 $\sin 30^\circ$ 、 $\cos 30^\circ$ 、 $\sin 45^\circ$ 、 $\cos 45^\circ$ 。
- ② 摩天轮半径 10 米，中心离地 12 米。转到最高点和最低点时，座舱离地多高？
- ③ 判断 $\sin 210^\circ$ 和 $\cos 210^\circ$ 的正负。
- ④ 用 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ，求 $\sin \theta$ （已知 θ 在第一象限， $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ）。

▼ 看答案

- ① $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ， $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。
- ② 最高 $12 + 10 = 22$ 米，最低 $12 - 10 = 2$ 米。
- ③ 210° 在第三象限， $\sin 210^\circ < 0$ ， $\cos 210^\circ < 0$ 。
- ④ $\sin^2 \theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ ，第一象限取正， $\sin \theta = \frac{4}{5}$ 。

一句话记住



三角函数，就是单位圆上那个点的坐标。

把圆展开成波浪

振幅、周期、频率与相位

正弦曲线

周期

频率

相位

⌚ 约 11 分钟

动手玩 · 约 10 分钟



把圆展开成波浪

(在网页版打开可动手玩)

让圆滚动展开，调振幅、频率、相位，看一条正弦波怎样被三个参数捏出来。

摩天轮转一圈，小 π 的高度完成了一次“低—高一低”。如果他把每一时刻的高度画在纸上，会得到一条上下起伏的曲线。

欧拉把圆从纸上“剪开”，铺成一条直线，然后在旁边画了一条波浪：“你看，圆上的点转一圈，正好对应波浪走完一个周期。”

一、从圆到波

单位圆上的点，纵坐标是 $\sin \theta$ 。

- 当 θ 从 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ ， $\sin \theta$ 从 0 升到 1；
- 从 $\frac{\pi}{2}$ 到 π ，从 1 降回 0；
- 从 π 到 $\frac{3\pi}{2}$ ，从 0 降到 -1；
- 从 $\frac{3\pi}{2}$ 到 2π ，从 -1 升回 0。

把 θ 当作横坐标， $\sin \theta$ 当作纵坐标，把这些点描出来，就得到一条**正弦曲线**。

“圆展开成波”这句话，在数学上可以写得很具体：弧长 $s = r\theta$ ，把 s 铺在横轴上，把圆上的高度铺在纵轴上。对单位圆来说，横轴就是 θ 。

二、波四个参数

真实世界里的波，很少是“标准”的 $y = \sin t$ 。它可能更高、更密、更早或更晚。于是我们写出：

$$y = A \sin(\omega t + \varphi)$$

这里出现了四个量：

- **振幅** A ：波最高能到多少。 $|A|$ 是振幅， $A < 0$ 时波会上下翻转。
- **角频率** ω ：转得多快。 ω 越大，波越“密”。
- **周期** T ：走完一个完整波形需要的时间。 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。
- **频率** f ：一秒钟走完几个周期。 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ 。
- **初相** φ ： $t = 0$ 时波已经走到了哪里。它让整条波左右平移。

小学、初中的“频率”常指每秒几次，这里的 f 正是这个意思；而 ω 是“每秒转多少弧度”，所以多了一个 2π 。

为什么周期是 $2\pi/\omega$

$\sin$ 完成一个周期需要“内部角度”走 2π 。内部角度是 $\omega t + \varphi$ ，当 t 增加 T 时，它增加 ωT 。要让 $\omega T = 2\pi$ ，就必须有 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。

三、 $\sin$ 和 $\cos$ 是同一条波

把 $\sin$ 曲线向左平移 $\frac{\pi}{2}$ ，就得到 $\cos$ 曲线：

$$\cos \theta = \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

所以 $\sin$ 和 $\cos$ 不是两种波，而是同一条波的两个“起跑位置”。这也解释了为什么它们的图像形状完全一样，只是错开了四分之一个周期。

同理， $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ ， $\cos(-\theta) = \cos \theta$ 。正弦是奇函数，余弦是偶函数。

四、参数怎么改变图像

- 把 A 变大：波被纵向拉高。
- 把 ω 变大：波被横向压密，周期变短。
- 把 φ 变大：整条波向左平移； φ 变小则向右平移。
- 把 A 变成负数：波上下翻转。

在 2.2 的游乐场里，你可以同时拖动这三个滑块，看圆上的点和右边的波浪怎样同步变化。你还会看到一条“周期标尺”，能量出相邻两个波峰之间的距离。

五、声音也是波

声音是空气的振动。振动的快慢决定**音高**，振动的幅度决定**响度**，波形的细节决定**音色**。

- 频率越高，音越高。标准音 A4 是 440 Hz，意思是每秒振动 440 次。
- 振幅越大，声音越响。
- 同样频率下，正弦波听起来很“纯”，吉他的波形更复杂，所以音色不同。

这一节先建立“波”的图像，下一节我们会让几个波叠在一起，做出更复杂的声音。

六、小心三个坑

⚠ 坑一： ω 不是频率

ω 是角频率（弧度/秒）， f 是频率（次/秒）， $f = \frac{\omega}{2\pi}$ 。如果题目说“每秒转 2 圈”，那 $f = 2$ ， $\omega = 4\pi$ 。

⚠ 坑二：周期看的是“完整一圈”

$\sin$ 从 0 升到 1 再回到 0，只走了半个周期；必须再降到 -1 再回到 0，才算一个完整周期。

⚠ 坑三：相位不是“时间”

φ 是一个角度，不是一个时长。它让波平移，但平移量是 $\frac{\varphi}{\omega}$ 秒，不是 φ 秒。

七、挑战

🎯 四关小挑战

- ① 写出 $y = 2 \sin(3t + \frac{\pi}{4})$ 的振幅、角频率、周期和初相。
- ② 如果 $f = 5 \text{ Hz}$ ，周期是多少？ ω 是多少？
- ③ 把 $y = \sin t$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{2}$ ，得到什么函数？
- ④ $\cos \theta = \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$ ，那么 $\sin \theta$ 可以写成 $\cos$ 的什么形式？

▼ 看答案

① 振幅 2，角频率 3，周期 $T = \frac{2\pi}{3}$ ，初相 $\frac{\pi}{4}$ 。

② $T = \frac{1}{5} = 0.2$ 秒， $\omega = 2\pi f = 10\pi$ 。

③ $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos t$ 。

④ $\sin \theta = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ 。

一句话记住

圆上的匀速旋转，展开就是一条波。

旋转的加法

和角公式的几何证明

和角公式

旋转

倍角

⌚ 约 12 分钟

动手玩 · 约 11 分钟



旋转的加法

(在网页版打开可动手玩)

先转 α 再转 β ，看两个旋转怎样合成一个旋转，和角公式在图上逐项对应。

小 π 在游乐场里发现了一个“双转盘”：先转第一个盘 α 角，再转第二个盘 β 角。

“那不就是一次转 $\alpha + \beta$ 吗？”小 π 说。

“对。”欧拉说，“但你想过没有： $\sin(\alpha + \beta)$ 能不能拆成 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\sin \beta$ 、 $\cos \beta$ 的组合？”

小 π 试了试：“ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$ ？”

欧拉摇头：“你转 30° 再转 30° ，高度会变成两倍吗？”

一、先看一个反例

取 $\alpha = 30^\circ$ ， $\beta = 30^\circ$ 。

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ，所以 $\sin 30^\circ + \sin 30^\circ = 1$ 。

但 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ ，不是 1。

所以 $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin \alpha + \sin \beta$ 。三角函数不是“拆开就加”的。

二、旋转的合成

单位圆上，先转 α ，再转 β ，等于一次转 $\alpha + \beta$ 。

用坐标表示，旋转 α 会把点 (x, y) 变成：

$$(x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

这是**旋转矩阵**的作用：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

先转 α 再转 β ，相当于把两个旋转矩阵乘起来。而结果应该等于一次转 $\alpha + \beta$ 的矩阵。比较两边的元素，就得到**和角公式**：

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

把 β 换成 $-\beta$ ，利用 $\sin(-\beta) = -\sin \beta$ 、 $\cos(-\beta) = \cos \beta$ ，还能得到**差角公式**：

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

💡 四个字：正余余正

$\sin(\alpha + \beta)$ 是“正余、余正”相加： $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 。 $\cos(\alpha + \beta)$ 是“余余、正正”相减： $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ 。但别只背口诀，画个图、看投影，符号自然就出来了。

三、用图看一遍

在 2.3 的游乐场里，你会看到：

- 一条从原点出发的射线，先转到 α ；
- 再转 β ，落到 $\alpha + \beta$ ；
- 两个角对应的横纵投影，被分别标了出来。

把 $\cos(\alpha + \beta)$ 的投影拆开，正好是“ $\cos \alpha \cos \beta$ 减去 $\sin \alpha \sin \beta$ ”。这不是代数变形，而是几何上的两段长度相减。

四、倍角公式

令 $\beta = \alpha$ ，和角公式就变成**倍角公式**：

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

倍角公式在物理里很常见：比如简谐运动里的“倍频”，就是倍角公式在起作用。

五、辅助角公式

形如 $a \sin x + b \cos x$ 的式子，看起来是两个波，其实可以合成一个波：

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$$

其中 φ 满足 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

这个公式在 2.4 会派上大用场：两个同频率的波叠加，结果还是一条同频率的波，只是振幅和相位变了。

六、小心三个坑

⚠ 坑一：sin 不能直接相加

$\sin(\alpha + \beta) \neq \sin \alpha + \sin \beta$ 。这是本章最容易犯的错。先写公式，再代数。

⚠ 坑二：余弦公式中间是减号

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ，中间是减号。正弦公式中间是加号。两者符号相反。

⚠ 坑三：角度单位统一

和角公式里的 α 、 β 可以是度，也可以是弧度，但必须统一。不要一个用度、一个用弧度。

七、挑战

四关小挑战

- ① 用和角公式求 $\sin 75^\circ$ 。
- ② 用和角公式求 $\cos 75^\circ$ 。
- ③ 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, α 在第一象限, 求 $\sin 2\alpha$ 。
- ④ 把 $\sin x + \cos x$ 写成 $R \sin(x + \varphi)$ 的形式。

▼ 看答案

- ① $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ 。
- ② $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ 。
- ③ $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, 所以 $\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$ 。
- ④ $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 。

一句话记住

旋转会相加, 三角函数会展开。

影子乐队

简谐运动、叠加与声音

简谐运动

波

声音

拍

⌚ 约 12 分钟

动手玩 · 约 12 分钟



影子乐队

(在网页版打开可动手玩)

两个转盘上的小球把影子投到同一条线上，叠加成波；频率靠近时，你还能听见“拍”。

游乐场的最里面，有一个奇怪的舞台。

舞台上有两个转盘，转盘上各有一个小球。灯光从侧面照过来，小球在墙上的影子落在同一条竖线上。两个影子一上一下，合成了一个更复杂的上下运动。

“这就是**影子乐队**。”欧拉说，“每一个转盘是一个乐手，影子是它的歌声。两个影子叠在一起，声音就变了。”

一、圆周运动的影子

一个点匀速转圈，它在一条直径上的投影，会来回摆动。

让转盘半径为 A ，角速度为 ω ，初始角为 φ ，那么影子离中心的位置是：

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

这个“来回摆动”叫**简谐运动**（SHM）。摩天轮的高度、钟摆的摆动、弹簧的振动、声带的振动，本质上都是某个圆周运动的投影。

为什么是投影？因为圆周运动有两个分量：一个在 x 方向，一个在 y 方向。从侧面看，你只看到其中一个分量，它就在做“余弦式”的往复运动。

二、周期与频率

简谐运动走完一次完整来回，需要的时间是**周期**：

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

一秒钟完成几次来回，是**频率**：

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

- 钟摆慢悠悠：周期长，频率低。
- 蜂鸟翅膀：周期极短，频率高。
- 声音：空气每秒振动几百次，所以频率在几百 Hz 量级。

在 2.4 的游乐场里，你可以拖动两个转盘的频率。频率越接近，影子合成的波形越“纠缠”；频率差得远，波形就很快变得复杂。

三、波的叠加

两个影子叠在一起，位置相加：

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

如果两个转盘的频率**相同**，结果还是一条同频率的余弦波，只是振幅和相位变了（这就是 2.3 的辅助角公式在帮忙）。

如果两个频率**很接近**，会出现一种特别的现象：**拍**。

两个频率相差 Δf 的波叠在一起，合振动的振幅会以 Δf 的频率一强一弱地变化。人耳听到的，就是“嗡——嗡——”的周期性起伏。

💡 拍频为什么是差值

两个频率 f_1 、 f_2 靠近时，它们的相位差随时间以 $|f_1 - f_2|$ 的速度变化。相位差每转一圈，合振幅就经历一次“强—弱—强”，所以拍的频率正好是 $|f_1 - f_2|$ 。

四、声音是什么

声音是空气的振动。它有三个基本要素：

- **音高**：由频率决定。频率越高，音越高。
- **响度**：由振幅决定。振幅越大，声音越响。
- **音色**：由波形的细节决定。同样是 440 Hz，小提琴和钢琴听起来不一样，因为它们的波形里混着不同的高次谐波。

在游乐场里，点“听一听”按钮，你会听到两个相差几赫兹的音同时响起。仔细听，声音会一强一弱地起伏——这就是拍。

五、为什么投影这么重要

物理里到处是“圆周运动的投影”：

- 单摆在小角度下近似做简谐运动；
- 弹簧振子的位移是余弦函数；
- 交流电的电压是正弦函数；
- 潮汐、声波、光波，都可以用正弦波叠加来描述。

一个看起来简单的“转圈”，投影出来就是整个振动与波的世界。

六、小心三个坑

⚠ 坑一：频率和角频率又混了

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ 。题目说“每秒转 3 圈”， $f = 3$ ， $\omega = 6\pi$ 。

⚠ 坑二：投影方向决定 sin 还是 cos

从 x 轴方向看，投影是 cos；从 y 轴方向看，投影是 sin。两者只差一个相位。

⚠ 坑三：叠加不是振幅直接相加

两个波叠加时，要看相位。同相时振幅相加，反相时可能相互抵消。不是 $A_1 + A_2$ 永远成立。

七、挑战

🎯 四关小挑战

- ① 一个简谐运动 $x = 3 \cos(4t + \frac{\pi}{6})$ ，求振幅、周期和频率。
- ② 两个音叉分别是 440 Hz 和 444 Hz，拍频是多少？
- ③ 为什么两个同频率、同振幅、相位相反的波叠加后是 0？
- ④ 摩天轮的高度变化，为什么可以看成简谐运动？

▼ 看答案

- ① 振幅 3, $\omega = 4$, $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $f = \frac{1}{T} = \frac{2}{\pi}$ 。
- ② 拍频 $= |444 - 440| = 4 \text{ Hz}$ 。
- ③ 两个波分别为 $A \cos \theta$ 和 $A \cos(\theta + \pi) = -A \cos \theta$, 相加为 0。
- ④ 座舱高度 $h = H + R \sin \theta$, 而 $\theta = \omega t + \varphi$, 所以 h 是正弦型函数, 正是简谐运动。

一句话记住

圆周运动的影子, 就是简谐运动; 影子的叠加, 就是波。

圆、波与旋转

把旋转园装进口袋

总结

公式速查

自测

⌚ 约 8 分钟

从旋转园出来，小 π 的头发被风吹得乱糟糟的。

欧拉问：“你学到了什么？”

小 π 说：“我知道了 $\sin$ 和 $\cos$ 是圆上点的坐标，还知道圆展开就是波。”

欧拉点点头：“那你来说说，为什么摩天轮的高度、钟摆的摆动、声音的振动，看起来完全不一样，却能用同一套公式描述？”

小 π 想了想：“因为它们都是‘圆上的点’投下来的影子。”

“答对了。”

三张脸

这一章的三角函数有三张脸：

1. 圆上的坐标： $(\cos \theta, \sin \theta)$ 。
2. 直角三角形的比：对边比斜边、邻边比斜边。
3. 波浪： $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ 。

它们是同一个东西。看到其中一张，要能想到另外两张。

六个公式

内容	公式
弧度与角度	$360^\circ = 2\pi, \theta = \frac{s}{r}$
平方关系	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
周期与频率	$T = \frac{2\pi}{\omega}, f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$
和角公式	$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
和角公式	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
辅助角	$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$

两种眼光

第一种：投影的眼光。 看到旋转，就想到它在某条轴上的影子；看到摆动，就想到它背后那个匀速转动的圆。

第二种：叠加的眼光。 复杂的波，可以拆成简单波的叠加；反过来，简单的波叠在一起，也可能变成复杂的声音、潮汐、电流。

自测

1. 为什么数学家用弧度？
2. 摩天轮转一圈，高度变化几次？周期是多少？
3. 两个频率相差 3 Hz 的音叉，拍频是多少？
4. $\sin(\alpha + \beta)$ 能不能写成 $\sin \alpha + \sin \beta$ ？

如果卡住了，回到对应小节，或者再玩一遍游乐场。

挑战答案

2.1

① $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

② 最高 22 米, 最低 2 米。

③ $\sin 210^\circ < 0$, $\cos 210^\circ < 0$ 。

④ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ 。

2.2

① 振幅 2, 角频率 3, 周期 $\frac{2\pi}{3}$, 初相 $\frac{\pi}{4}$ 。

② $T = 0.2$ 秒, $\omega = 10\pi$ 。

③ $-\cos t$ 。

④ $\sin \theta = \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$ 。

2.3

① $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 。

② $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 。

③ $\frac{24}{25}$ 。

④ $\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ 。

2.4

① 振幅 3, 周期 $\frac{\pi}{2}$, 频率 $\frac{2}{\pi}$ 。

② 4 Hz。

③ 两个波相位相反，逐点抵消。

④ 高度是正弦型函数 $h = H + R \sin(\omega t + \varphi)$ 。

下一站

欧拉指着远处的过山车：“下一章，我们去看‘变化的速度’。摩天轮转得有多快，过山车在某一瞬间有多快，曲线在每一点有多陡——这些问题的答案，都叫**导数**。”

小 π 问：“导数难吗？”

欧拉笑了：“你已经在旋转园里见过它了。圆的影子，就是变化的开始。”

导数的意义及常用求导法则

变化的速度与曲线的斜率

变化率

切线

导数

链式法则

游乐场的东边，有一条长长的下坡路。

小 π 骑着一辆借来的自行车，冲下坡。码表上的数字不停跳动：12、18、25、31……他越骑越快。

“欧拉，”小 π 喊，“码表上显示的是我现在的速度，可速度本身也在变啊。‘现在’这一刻的速度，到底是什么意思？”

欧拉坐在后座，尾巴被风吹得笔直：“这个问题，问出了整个微积分。”

一个瞬间，怎么会有速度？

速度是“路程除以时间”。可如果你只取“一个瞬间”，时间是 0，路程也是 0， $0/0$ 没有意义。

数学家没有硬算这个 $0/0$ ，而是换了一个问题：

如果我只取很小很小的一段时间，平均速度会趋近于什么？

这个“趋近于什么”，就是**导数**。

本章地图

- **3.1 从平均速度到瞬时速度**：割线怎样变成切线？导数定义里的极限是什么意思？
- **3.2 切线与导函数**：每一点的斜率组成一个新函数；为什么尖点没有导数？
- **3.3 求导积木**：幂函数、和差、乘积、商的求导法则，以及乘积法则为什么不是简单相乘。
- **3.4 链式法则与最优**：变化套着变化；怎样用导数找山顶、山谷和最大面积。

每一节都有一个可以动手玩的网页。你会拖动 h 让它越来越小，也会亲手把切线“贴”到曲线上。

出发前，欧拉的问题

欧拉从口袋里掏出一张纸条：

1. 平均速度和瞬时速度，差在哪里？
2. 为什么切线斜率能代表“变化快慢”？
3. 为什么 $(uv)'$ 不等于 $u'v'$ ？
4. 过山车的最高点，为什么切线是水平的？

小 π 想了想：“第一题我大概能说，后面三个完全没底。”

欧拉笑了：“等你玩完这一章，四个都能答。”

从平均速度到瞬时速度

割线、切线与导数的定义

平均变化率

极限

导数定义

瞬时速度

🕒 约 11 分钟

动手玩 · 约 10 分钟



割线变成切线

(在网页版打开可动手玩)

让 h 从 1 一点点缩到 0，看割线怎样贴成切线，平均速度怎样逼近瞬时速度。

小 π 的自行车下坡时，码表每秒跳一次。

第一秒，他从 0 米骑到 1 米；第二秒，从 1 米骑到 4 米；第三秒，从 4 米骑到 9 米。

“你第一秒平均速度 1 米/秒，第二秒 3 米/秒，第三秒 5 米/秒。”欧拉说，“可码表不会等你骑完一秒才显示速度。它显示的是‘此刻’。”

小 π 问：“那‘此刻’到底是哪一刻？”

欧拉说：“这就是这一节要回答的问题。”

一、平均速度

如果物体的位置是时间 t 的函数 $s(t)$ ，那么在时间段 $[t_0, t_0 + h]$ 里，平均速度是：

$$\bar{v} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

这里的 h 是时间间隔。 h 越小，平均速度就越接近“某一瞬间”的速度。

比如 $s(t) = t^2$ (单位：米)，在 $t = 2$ 附近：

- $h = 1$: 平均速度 $\frac{3^2-2^2}{1} = 5$
- $h = 0.5$: 平均速度 $\frac{2.5^2-2^2}{0.5} = 4.5$
- $h = 0.1$: 平均速度 $\frac{2.1^2-2^2}{0.1} = 4.1$
- $h = 0.01$: 平均速度 $\frac{2.01^2-2^2}{0.01} = 4.01$

数字越来越接近 4。

二、让 h 趋近于 0

h 不能真的等于 0，否则分母为 0，式子没有意义。但我们可以让 h 越来越小，看平均速度趋近于什么。

用代数算一遍：

$$\frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = 4 + h$$

只要 $h \neq 0$ ，就可以约掉 h 。当 h 越来越接近 0， $4 + h$ 就越来越接近 4。

我们把这个“趋近的目标”记作：

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = 4$$

读作“当 h 趋近于 0 时，这个式子的极限是 4”。

所以 $s(t) = t^2$ 在 $t = 2$ 时的瞬时速度是 **4 米/秒**。

三、从割线到切线

把函数图像画出来，平均速度就是连接两点的**割线**斜率：

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

当 h 越来越小，第二个点沿着曲线滑向第一个点，割线就越来越接近**切线**。

所以：

瞬时速度 = 切线斜率 = 导数。

在 3.1 的游乐场里，你可以拖动 h ，看割线一点点贴到切线上；右边的表格会显示 h 和平均速度，数字会越来越靠近一个固定值。

四、导数的定义

把上面的过程写成一般形式：

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

这个数叫函数 f 在 x_0 处的**导数**。它表示：

- 几何上：曲线在 x_0 处的切线斜率；
- 物理上：瞬时变化率；
- 生活里：那一刻“变化得有多快”。

导数的记号有好几种：

$$f'(x), \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \dot{y}$$

它们说的是同一件事。 $\frac{dy}{dx}$ 不是“ dy 除以 dx ”的普通分数，而是“ y 对 x 的变化率”的记号——但它长得像分数，是因为它本来就是从“差商”来的。

⚠ 坑一：h 不能等于 0

导数的定义里， h 是“趋近于 0”，不是“等于 0”。先约分、再取极限，这是标准动作。

⚠ 坑二：平均速度不是瞬时速度

平均速度看一段区间，瞬时速度看一个点。题目问“第 3 秒末的速度”，那是瞬时速度；问“前 3 秒的平均速度”，那是平均速度。

⚠ 坑三：导数是局部的

$f'(x_0)$ 只描述 x_0 附近的一小段，不是整条曲线的平均。曲线弯得厉害的地方，每一点导数都可能不同。

五、用定义算一个导数

求 $f(x) = x^2$ 在任意点 x 处的导数：

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

所以 $(x^2)' = 2x$ 。

- 在 $x = 0$ ：切线水平，导数为 0；

- 在 $x = 2$: 导数为 4;
- 在 $x = -3$: 导数为 -6 (切线向下倾斜)。

这个结果，下一节会从图像上再看一遍。

导数在“放大”什么

把曲线在一点附近不断放大，它会越来越像一条直线。这条直线的斜率，就是导数。导数是曲线在某一点的“局部直线化”。

六、挑战

四关小挑战

- ① $s(t) = t^2$, 求 $[2, 3]$ 上的平均速度。
- ② $s(t) = t^2$, 求 $t = 2$ 时的瞬时速度 (用定义算)。
- ③ $f(x) = 3x + 1$, 求 $f'(x)$ 。
- ④ 如果 $f'(a) > 0$, 函数在 a 附近是上升还是下降?

▼ 看答案

① $\frac{9-4}{1} = 5$ 。

② $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4$ 。

③ $\frac{3(x+h)+1-(3x+1)}{h} = 3$ ，所以 $f'(x) = 3$ 。

④ 上升：切线斜率为正，函数在 a 附近随 x 增大而增大。

一句话记住

让间隔越来越小，平均就变成了瞬时；割线就变成了切线。

切线与导函数

每一点的斜率组成一条新曲线

导函数

切线

幂法则

不可导

⌚ 约 11 分钟

动手玩 · 约 10 分钟



切线放大镜

(在网页版打开可动手玩)

拖动切点，切线跟着转；下方同步画出导函数的轨迹，看看斜率是怎样变成一条新曲线的。

小 π 把手指放在 $y = x^2$ 的图像上，从左往右慢慢滑。

“每到一个点，切线都不一样。”他说。

欧拉点头：“把每个点的切线斜率都记下来，你会得到一条新的曲线。这条新曲线，叫**导函数**。”

一、从“一点的导数”到“导函数”

上一节，我们算的是 f 在某一点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 。

如果让 x_0 动起来，每一点都有一个导数值，于是就得到一个新函数：

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

它叫 f 的**导函数**，简称导数。

- f 给出“高度”；
- f' 给出“每一点的陡峭程度”。

在 3.2 的游乐场里，上面是 f 的曲线和切线，下面是 f' 的轨迹。你拖动切点，两条曲线会同时动。

二、几个基本导数

用定义算一遍，能得到最常用的一批结果：

$$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2$$

更一般地，对任何实数 n ：

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

这就是**幂法则**。

- $(x^4)' = 4x^3$
- $(x^{10})' = 10x^9$
- $(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
- $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

常数的导数是 0：一条水平线，斜率为 0。

$$(C)' = 0$$

💡 幂法则的直觉

x^n 是“边长为 x 的 n 维立方体”的体积。 x 增加一点点，体积增加多少？增加的量主要来自 n 个“面”，每个面的“面积”是 x^{n-1} ，所以导数是 nx^{n-1} 。三维时就是“表面积 $3x^2$ ”。

三、导函数图像怎么读

把 f 和 f' 画在一起，会发现：

- f' 为正： f 上升；
- f' 为负： f 下降；
- $f' = 0$ ： f 的切线水平，可能是山顶、山谷，也可能是“平台”。

以 $f(x) = x^2$ 为例， $f'(x) = 2x$ ：

- $x < 0$ ： $f' < 0$ ， f 下降；
- $x = 0$ ： $f' = 0$ ，最低点；
- $x > 0$ ： $f' > 0$ ， f 上升。

所以导函数像一张“心电图”，告诉你原函数在哪里上、哪里下、哪里停。

四、不是所有点都有导数

$f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处有一个尖角。

- 从左边靠近 0，斜率是 -1 ；
- 从右边靠近 0，斜率是 $+1$ 。

左右两边的“趋势”不一样，所以 $f'(0)$ 不存在。这个点叫**不可导点**。

直观地说：曲线在这一点没有唯一的切线。你可以画出很多条“贴着”尖角的直线，但没有一条能同时贴住左右两边。

⚠ 坑一：可导一定连续，连续不一定可导

$|x|$ 在 0 处连续，但不可导。连续只要求“不断开”，可导还要求“光滑到只有一个切线方向”。

⚠ 坑二： f' 是函数，不是数

$f'(2)$ 是一个数（ $x = 2$ 处的斜率）； $f'(x)$ 是一个函数（每一点的斜率）。题目问哪个，要看清。

⚠ 坑三： $f'=0$ 不一定是极值

$f(x) = x^3$ 在 $x = 0$ 处 $f' = 0$ ，但函数一直在上升，0 不是山顶也不是山谷。要看 f' 在两侧是否变号。

五、挑战

🎯 四关小挑战

- ① 求 $(x^5)'$ 和 $(x^{-2})'$ 。
- ② 求 $f(x) = x^2$ 在 $x = -3$ 处的切线斜率，并判断函数在该点是上升还是下降。
- ③ $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处为什么不可导？
- ④ 如果 $f'(x)$ 在某个区间恒为正， f 在这个区间是上升还是下降？

▼ 看答案

① $(x^5)' = 5x^4$, $(x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ 。

② $f'(-3) = 2 \times (-3) = -6 < 0$, 函数在 $x = -3$ 附近下降。

③ 左导数为 -1 , 右导数为 $+1$, 左右不相等, 所以没有唯一的切线斜率。

④ 上升。

一句话记住

导函数是原函数的“斜率地图”。

求导积木

和、差、乘积与商的求导法则

幂法则

乘积法则

商法则

多项式

⌚ 约 12 分钟

动手玩 · 约 11 分钟



求导积木工厂

(在网页版打开可动手玩)

拼一个多项式，逐块求导；再用矩形面积动画看乘积法则为什么多出一个交叉项。

欧拉把一张纸撕成几块，每块写上一个函数。

“求导不是从头算。”她说，“大多数函数，都是由几块简单积木拼出来的。你只要知道每块积木怎么变，再知道拼法怎么变。”

小 π 看着纸片：“所以先学积木，再学拼装？”

“对。这就是求导法则。”

一、和、差与常数倍

如果 u 、 v 都可导，那么：

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(Cu)' = C u'$$

也就是说：**和的导数等于导数的和；常数可以提出来。**

比如：

$$(3x^2 + 2x + 1)' = (3x^2)' + (2x)' + (1)' = 6x + 2$$

多项式求导，就是一项一项地求，再把结果加起来。

二、幂法则回顾

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

配合和差法则，任何多项式都能快速求导：

$$(4x^3 - 2x^2 + 5x - 7)' = 12x^2 - 4x + 5$$

三、乘积法则：为什么不是简单相乘

很多人第一次会猜：

$$(uv)' = u'v'$$

这是错的。

取 $u = x$ ， $v = x$ ，则 $uv = x^2$ ，导数是 $2x$ 。而 $u'v' = 1 \times 1 = 1$ ，不等于 $2x$ 。

正确的法则是：

$$(uv)' = u'v + uv'$$

◆ 用面积看乘积法则

把 u 、 v 看成一个矩形的两条边，面积是 uv 。

现在 u 增加一点点 Δu ， v 增加一点点 Δv 。面积增加了三块：

- 右边新增的竖条: $v \Delta u$;
- 上边新增的横条: $u \Delta v$;
- 右上角的小方块: $\Delta u \Delta v$ 。

所以:

$$\Delta(uv) = v \Delta u + u \Delta v + \Delta u \Delta v$$

两边除以 Δx , 再让 $\Delta x \rightarrow 0$ 。最后那个“二阶小量” $\Delta u \Delta v / \Delta x$ 会趋于 0, 于是:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

直观地说: 面积的变化, 主要来自“两条边各自的变化”, 而“两条边同时变化”的角落太小, 可以忽略。

四、商法则

如果 $v \neq 0$, 那么:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

记忆方法: 上导下不导, 减去上不导下导, 再除以分母的平方。

例子:

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

五、把法则串起来

求 $f(x) = (x^2 + 1)(x + 3)$ 的导数。

方法一：先展开，再求导。

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3, \quad f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$$

方法二：用乘积法则。

$$f'(x) = (2x)(x + 3) + (x^2 + 1)(1) = 2x^2 + 6x + x^2 + 1 = 3x^2 + 6x + 1$$

两种方法结果一样。展开更稳，乘积法则在“展开很麻烦”时更快。

⚠ 坑一： $(uv)' \neq u'v'$

这是最常见的目标。乘积法则有两项，别漏掉任何一项。

⚠ 坑二：商法则的减号

商法则分子中间是减号： $u'v - uv'$ 。顺序也不能反，否则整体差一个负号。

⚠ 坑三：幂法则对负指数、分数指数也成立

$(x^{-1})' = -x^{-2}$ ， $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 。不要以为幂法则只管正整数。

六、挑战

四关小挑战

- ① 求 $(5x^3 - 3x + 2)'$ 。
- ② 用乘积法则求 $[(x^2 + 1)(x + 3)]'$ 。
- ③ 求 $(\frac{2x}{x-1})'$ 。
- ④ 判断对错: $(x \cdot x)' = 1 \times 1 = 1$ 。

▼ 看答案

- ① $15x^2 - 3$ 。
- ② $(2x)(x + 3) + (x^2 + 1) = 3x^2 + 6x + 1$ 。
- ③ $\frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$ 。
- ④ 错。 $(x \cdot x) = (x^2)' = 2x$; 乘积法则给出 $1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$ 。

一句话记住

积木各有各的导数，拼装要按法则来。

链式法则与最优

变化套着变化，怎样找山顶

链式法则

复合函数

极值

优化

⌚ 约 13 分钟

动手玩 · 约 12 分钟



齿轮与过山车

(在网页版打开可动手玩)

用齿轮看懂“变化率相乘”，再坐一次过山车，找切线水平的位置和最大面积。

游乐场里有一组齿轮。

第一个齿轮转一圈，第二个齿轮转三圈；第二个齿轮转一圈，又带动第三个齿轮转两圈。

小 π 盯着看：“所以第一个齿轮转一圈，第三个会转六圈？”

“对。”欧拉说，“变化会沿着齿轮传下去，而且**变化率会相乘**。这就是链式法则。”

一、复合函数

有些函数是“套”出来的：

$$y = (3x + 1)^5$$

先算里面 $u = 3x + 1$ ，再算外面 $y = u^5$ 。

这种函数叫**复合函数**，记作 $y = f(g(x))$ 。

求导时，不能只对外面求导，也不能只对里面求导，而要两层都管。

二、链式法则

如果 $y = f(u)$, 而 $u = g(x)$, 那么:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

用 f' 的记号写:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

一句话: 外层导数 $\times$ 内层导数。

◆ 齿轮的类比

- $u = g(x)$: 第一个齿轮带动第二个, 传动比是 $g'(x)$;
- $y = f(u)$: 第二个带动第三个, 传动比是 $f'(u)$;
- 总传动比是两者相乘: $f'(u) \cdot g'(x)$ 。

变化率也是这样一层层传下去的。

◆ 例子

求 $y = (3x + 1)^5$ 的导数。

外层是 u^5 , 导数是 $5u^4$; 内层是 $3x + 1$, 导数是 3。所以:

$$y' = 5(3x + 1)^4 \cdot 3 = 15(3x + 1)^4$$

再比如:

$$(\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x$$

$$(e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$$

最后这个式子，第 4 章会反复出现。

三、用导数找山顶和山谷

导数告诉我们函数在哪里上升、哪里下降。

- 如果 $f'(x) > 0$ ，函数上升；
- 如果 $f'(x) < 0$ ，函数下降；
- 如果 $f'(x) = 0$ ，切线水平，可能是山顶、山谷，也可能是平台。

山顶： f' 由正变负（先上后下）。**山谷：** f' 由负变正（先下后上）。

所以找极值的步骤是：

1. 求 $f'(x)$ ；
2. 解 $f'(x) = 0$ ，找到“可疑点”；
3. 看 f' 在可疑点两侧的符号；
4. 判断是山顶、山谷，还是都不是。

四、优化问题

游乐场要围一个矩形花坛，篱笆总长 20 米。怎样围，面积最大？

设矩形的一边为 x ，另一边就是 $10 - x$ ，面积：

$$A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$$

求导：

$$A'(x) = 10 - 2x$$

令 $A'(x) = 0$ ，得 $x = 5$ 。此时另一边也是 5，面积：

$$A = 5 \times 5 = 25$$

所以，围成正方形时面积最大。

导数不是只在纸上算斜率。它能帮我们在所有可能里，找到“最好”的那一个。

五、小心三个坑

⚠ 坑一：忘记乘内层导数

$(3x + 1)^5$ 的导数不是 $5(3x + 1)^4$ ，而是 $15(3x + 1)^4$ 。外层求完，一定要乘内层导数。

⚠ 坑二： $f'=0$ 不一定是极值

$f(x) = x^3$ 在 0 处导数为 0，但函数一直上升，不是山顶也不是山谷。必须看两侧符号有没有变化。

⚠ 坑三：实际问题要看范围

围花坛时， x 必须大于 0、小于 10。求出的驻点还要放回实际范围里检查。

六、挑战

四关小挑战

- ① 求 $y = (2x + 1)^3$ 的导数。
- ② 求 $y = \sin 3x$ 的导数。
- ③ $f(x) = x^2 - 4x + 1$ 在哪里取得最小值？
- ④ 用 12 米篱笆围矩形，最大面积是多少？

▼ 看答案

- ① $3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2$ 。
- ② $3 \cos 3x$ 。
- ③ $f'(x) = 2x - 4 = 0$, $x = 2$; f' 由负变正，是山谷，最小值 $f(2) = -3$ 。
- ④ 设一边 x , 另一边 $6 - x$, 面积 $A = x(6 - x)$, $A' = 6 - 2x = 0$, $x = 3$, 最大面积 9 平方米。

一句话记住

变化套着变化，就把变化率乘起来；找山顶，就看切线什么时候水平。

变化、斜率与最优

把坡度园装进口袋

总结

公式速查

自测

⌚ 约 8 分钟

从过山车上下来，小 π 的腿有点软。

欧拉问：“你学到了什么？”

小 π 说：“导数就是瞬时变化率，也是切线斜率。还有，变化可以一层层套起来。”

欧拉点头：“那你说说，为什么山顶的切线一定是水平的？”

小 π 想了想：“因为在最高点，再往左往右都往下走，瞬间既不在上升也不在下降，变化率是 0。”

“答对了。”

三张脸

导数有三张脸：

1. **变化率**：某一瞬间变化得有多快。
2. **切线斜率**：曲线在这一点有多陡。
3. **新函数**：每一点的斜率组成导函数 $f'(x)$ 。

它们是同一个东西的三种说法。

公式速查

内容	公式
导数定义	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
幂法则	$(x^n)' = nx^{n-1}$
和差	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
常数倍	$(Cu)' = Cu'$
乘积法则	$(uv)' = u'v + uv'$
商法则	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
链式法则	$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$
极值条件	$f'(x) = 0$, 且两侧变号

两种眼光

第一种：局部的眼光。 把曲线放大到一点附近，它几乎是一条直线；这条直线的斜率就是导数。

第二种：优化的眼光。 想知道“什么时候最好”，就找导数为 0 且变号的地方。山顶、山谷、最大面积，都藏在那里。

自测

1. 平均速度和瞬时速度有什么区别？
2. $f(x) = x^2$ 的导函数是什么？在 $x = 3$ 处的切线斜率是多少？
3. 为什么 $(uv)' \neq u'v'$ ？
4. 链式法则里，为什么要乘内层导数？

5. 过山车最高点的导数是多少？

挑战答案

3.1

① 5。

② 4。

③ $f'(x) = 3$ 。

④ 上升。

3.2

① $(x^5)' = 5x^4$, $(x^{-2})' = -2x^{-3}$ 。

② $f'(-3) = -6$, 下降。

③ 左导数 -1 , 右导数 $+1$, 左右不相等。

④ 上升。

3.3

① $15x^2 - 3$ 。

② $3x^2 + 6x + 1$ 。

③ $\frac{-2}{(x-1)^2}$ 。

④ 错, $(x^2)' = 2x$ 。

3.4

① $6(2x + 1)^2$ 。

② $3 \cos 3x$ 。

③ $x = 2$ ，最小值 -3 。

④ 最大面积 9 平方米。

下一站

欧拉指着游乐场深处的一扇门，门上写着一个奇怪的符号： e 。

“下一章，我们去看一个常数。它来自银行利息，却出现在细菌、放射性、冷却的咖啡里，最后还会和圆、三角函数撞个满怀。”

小 π 问：“一个常数，能有这么多故事？”

欧拉推开门：“进去看看就知道了。”

揭开自然常数 e 的神秘面纱

增长、复利与旋转

自然常数

复利

指数

欧拉公式

游乐场最深处，有一扇写着 e 的门。

小 π 推开门，里面是一家奇怪的银行。柜台上摆着一块牌子：

年利率 100%，按连续复利计算。

“年利率 100%？”小 π 眼睛亮了，“那我存 1 元，一年后是不是变成 2 元？”

欧拉从柜台后面探出头：“如果一年只算一次利息，是 2 元。如果半年算一次呢？”

“半年 50%，两次…… $1.5 \times 1.5 = 2.25$ 元！”

“如果每个月算一次呢？每天呢？每时每刻呢？”

小 π 愣住了：“会一直变大吗？”

欧拉笑了：“不会。它会停在一个数附近。这个数，就是 e 。”

一个“利滚利”的极限

把一年分成 n 段，每段利率是 $\frac{1}{n}$ ，那么 1 元钱一年后的金额是：

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- $n = 1$: 2
- $n = 2$: 2.25
- $n = 4$: 2.4414...
- $n = 12$: 2.6130...
- $n = 365$: 2.7146...

n 越大，结果越接近一个固定的数：

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828 \dots$$

它不会无限变大，也不会停在 2.7 之前。它稳稳地停在 e 。

本章地图

- **4.1 利滚利：e 从哪里来：**复利、连续增长，以及 e 的极限定义。
- **4.2 e 的两种面孔：**一个极限，一个无穷级数；为什么它算得这么快？
- **4.3 e^x ：导数等于自己：**增长、衰减、半衰期，以及 e^x 最特别的性质。
- **4.4 e 与圆：欧拉公式彩蛋：**当 e 走进复数平面，它竟然开始转圈。

每一节都有一个可以动手玩的网页。你会在银行里把复利次数调到“每时每刻”，也会亲眼看见 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 。

出发前，欧拉的问题

欧拉递给小 π 一张写着四个问题的卡片：

1. 为什么复利次数越多，金额不会无限变大？
2. e 为什么可以用 $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ 算出来？
3. 为什么 e^x 的导数还是 e^x ？
4. $e^{i\pi} + 1 = 0$ 里的 i 是什么？为什么这条式子被称为“最美的公式”？

小 π 看着卡片：“这四个问题，一个比一个不像小学数学。”

欧拉把门推开：“但每一个，都能用你已经学过的圆、增长和变化来理解。”

利滚利：e 从哪里来

复利次数与连续增长

复利

极限

自然常数

连续增长

🕒 约 11 分钟

动手玩 · 约 10 分钟



复利银行

(在网页版打开可动手玩)

把一年切成 n 段，看 1 元钱怎样从 2 元逼近 e ，再试试连续复利。

欧拉的银行有一个奇怪的规则：年利率 100%，但你可以选择“一年算几次利息”。

如果一年算一次，1 元变 2 元。如果一年算两次，每次 50%，1 元变 $1.5^2 = 2.25$ 元。如果一年算四次，每次 25%，1 元变 $1.25^4 \approx 2.4414$ 元。

小 π 发现，算得越勤，钱越多。他问：“那我让你每秒算一次，是不是就发财了？”

欧拉摇头：“我们算给你看。”

一、把一年切成 n 段

一年算 n 次，每次利率是 $\frac{1}{n}$ 。1 元钱一年后的金额是：

$$A_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

把 n 取大一点：

次数 n	每次利率	一年后金额
1	100%	2
2	50%	2.25
4	25%	2.441406...
12	8.33%	2.613035...
52	1.92%	2.692597...
365	0.27%	2.714567...
8760	0.011%	2.718126...

数字确实在变大，但增长越来越慢。它不会冲破 3，也不会无限上涨。

它趋向于一个固定的数：

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828459\dots$$

这个数叫**自然常数**，记作 e ，为了纪念数学家欧拉（Euler）。

二、为什么不会无限变大

直觉上，每多算一次利息，确实多一点点。但每次的利率也在变小。

- 段数 n 变大，每段利率 $\frac{1}{n}$ 变小；
- 虽然段数多了，但每段带来的增长越来越薄；
- 两种力量打平，结果停在一个有限值。

用二项式展开可以看清：

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots$$

当 n 越来越大，后面的项越来越接近

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

这个级数收敛，所以 e 是一个有限的数。下一节会专门算它。

三、连续复利

如果让 $n \rightarrow \infty$ ，就是“每时每刻都在算利息”，叫**连续复利**。

存 P 元，年利率 r ，连续复利 t 年后：

$$A = Pe^{rt}$$

比如存 1 元，年利率 100%，连续复利 1 年：

$$A = 1 \cdot e^1 = e \approx 2.718 \text{ 元}$$

如果年利率是 5%，连续复利 10 年：

$$A = e^{0.05 \times 10} = e^{0.5} \approx 1.6487$$

也就是 1 元变约 1.65 元。

💡 连续增长不只属于银行

细菌繁殖、人口增长、放射性衰变、咖啡冷却，很多“变化速度和当前数量成正比”的过程，都会长出 e 。

因为这类过程的解，天然就是 e^{kt} 。

四、 e 不是“随便定的”

e 不是为了好看而规定的。它是“连续增长”这件事本身长出来的数。

- 银行复利： $(1 + \frac{1}{n})^n$ ；
- 细菌分裂：数量按比例增长；
- 冷却的咖啡：温差按比例缩小。

它们最后都通向同一个极限 e 。这就是它叫“自然”常数的原因。

⚠️ 坑一： n 是次数，不是利率

$(1 + \frac{1}{n})^n$ 里， $\frac{1}{n}$ 是每段利率， n 是段数。年利率始终是 100%，不是 n 。

⚠️ 坑二： e 不是 2.7

$e \approx 2.71828$ ，不是 2.7，也不是 2.72。近似可以，但要知道它后面还有无限多位。

⚠ 坑三：连续复利用 e ，不是把 r 直接乘进去

连续复利是 Pe^{rt} ，不是 $P(1+rt)$ 。 e^{rt} 表示“每一瞬间都在按比例增长”。

五、挑战

🎯 四关小挑战

- ① 一年算 4 次，1 元一年后是多少？
- ② 用 100 元、年利率 10%、连续复利 2 年，写出金额式子（不必算具体值）。
- ③ 为什么复利次数越多，金额不会无限变大？
- ④ e 和 π 都是无理数，它们有什么共同点？

▼ 看答案

- ① $1.25^4 \approx 2.4414$ 元。
- ② $100e^{0.1 \times 2} = 100e^{0.2}$ 元。
- ③ 每次利率 $\frac{1}{n}$ 随段数变小，增长越来越慢，极限是有限的 e 。
- ④ 都是无限不循环小数，都不能写成分数；都在数学里“自然出现”，不是人为规定。

一句话记住

复利次数越多，钱越接近 e 倍； e 是连续增长的“天花板”。

e 的两种面孔

极限与无穷级数

级数

阶乘

极限

自然常数

🕒 约 11 分钟

动手玩 · 约 9 分钟



e 的级数拼图

(在网页版打开可动手玩)

一块一块加上 $1/k!$ ，看部分和怎样飞快地逼近 e ；顺便比较复利极限。

欧拉在纸上写下两个式子：

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

小 π 皱眉：“同一个数，怎么有两种写法？”

“因为 e 有两张脸。”欧拉说，“一张来自复利，一张来自加法。今天我们把第二张脸看清楚。”

一、阶乘

先认识阶乘：

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

并且规定：

$$0! = 1, \quad 1! = 1$$

阶乘长得非常快：

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
10	3,628,800

所以 $\frac{1}{n!}$ 会非常快地变小。这正是级数能收敛的原因。

二、用加法拼出 e

把下面这些项加起来：

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

算前几项：

加到第几项	部分和
1	1
2	2
3	2.5
4	2.666666...
5	2.708333...
6	2.716666...
7	2.718055...
8	2.718253...

只加到第 8 项，就已经和 $e \approx 2.7182818$ 很接近了。加到第 10 项，误差小于 10^{-7} 。

在 4.2 的游乐场里，你可以一块一块地加，看部分和贴着 e 往上爬，而且几乎不再往下掉。

三、两种面孔为什么相等

复利的极限：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

用二项式定理展开：

$$1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots$$

当 $n \rightarrow \infty$ ，像 $\frac{n(n-1)}{n^2}$ 这样的系数趋近于 1，于是每一项趋近于 $\frac{1}{k!}$ 。

所以两个式子给出同一个数。一个是“把一年切得越来越细”，一个是“把无穷多项加起来”。

四、e 是什么样的数

e 是**无理数**：它不能写成分数，小数无限不循环。

$$e = 2.718281828459045 \dots$$

它还是**超越数**：它不是任何整系数多项式方程的根。 π 也是超越数。

这两个性质都不影响我们使用它。工程里通常取 $e \approx 2.71828$ 就够了。

五、为什么它叫“自然”

第 3 章我们学过， e^x 的导数等于它自己：

$$(e^x)' = e^x$$

在所有指数函数 a^x 里，只有以 e 为底时，导数刚好等于原函数。这个性质让 e 成为微积分里最“自然”的底。

所以“自然常数”不是因为它出现在大自然里，而是因为它在变化率的意义上最自然。

⚠ 坑一：0! 不是 0

$0! = 1$ ，这是规定，也是让公式统一的需要。别把 $0!$ 算成 0。

 坑二：阶乘不是幂

$2^3 = 8$ ，但 $3! = 6$ 。阶乘是连乘到 n ，幂是同一个数乘 n 次。

 坑三：级数要一直加

有限项只是近似。加到第 10 项已经很准，但它仍然不是 e 本身； e 是无穷多项的和。

六、挑战

 四关小挑战

- ① 算 $4!$ 和 $\frac{1}{4!}$ 。
- ② 写出级数的前 5 项（从 1 开始）。
- ③ 前 5 项的部分和是多少？
- ④ 为什么 $\frac{1}{n!}$ 越来越小？

 看答案

- ① $4! = 24$ ， $\frac{1}{4!} = \frac{1}{24} \approx 0.04167$ 。
- ② $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$ 。
- ③ $1 + 1 + 0.5 + 0.1667 + 0.0417 \approx 2.7083$ 。
- ④ 因为 $n!$ 增长得越来越快，分母越大，分数越小。

一句话记住



e 既是复利的极限，也是阶乘倒数的无穷和。

e^x : 导数等于自己

增长、衰减与半衰期

指数函数

导数

增长

半衰期

🕒 约 12 分钟

动手玩 · 约 11 分钟



e^x 的切线

(在网页版打开可动手玩)

拖动切点，看 e^x 的切线斜率怎样始终等于它的高度；再切到增长/衰减模式，玩半衰期。

欧拉在纸上画了一条曲线，越往右越陡。

“这是 $y = e^x$ 。”她说，“你随便点一个点，量一量它的高度，再量一量切线的斜率。”

小 π 量了三个点，发现一个奇怪的现象：

“高度和斜率……总是一样？”

“对。”欧拉说，“这就是 e^x 最特别的地方：它的导数等于它自己。”

一、为什么导数等于自己

用导数定义算：

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

后面这个极限：

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

这是 e 的定义带来的结果。于是：

$$(e^x)' = e^x$$

不管 x 是多少，曲线在这一点的高度和斜率都相等。

- 在 $x = 0$ ：高度 1，斜率 1；
- 在 $x = 1$ ：高度 $e \approx 2.718$ ，斜率也是 e ；
- 在 $x = -1$ ：高度 $\frac{1}{e} \approx 0.368$ ，斜率也是 $\frac{1}{e}$ 。

二、链式法则： e 的 kx 次方

第 3 章的链式法则在这里很好用：

$$(e^{kx})' = e^{kx} \cdot k = ke^{kx}$$

例如：

$$(e^{2x})' = 2e^{2x}, \quad (e^{-3x})' = -3e^{-3x}$$

如果 $k > 0$ ，函数增长；如果 $k < 0$ ，函数衰减。

三、增长与衰减

很多自然过程满足：

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

- N_0 ：初始数量；
- $k > 0$ ：增长（细菌、人口、复利）；

- $k < 0$: 衰减（放射性、冷却、药物代谢）。

◆ 细菌繁殖

假设细菌每小时增长 50%，初始 100 个：

$$N(t) = 100e^{0.5t}$$

3 小时后约有 $100e^{1.5} \approx 448$ 个。

◆ 半衰期

放射性物质的“半衰期”是数量减半所需的时间。

设 $N(t) = N_0e^{-kt}$ ，令 $N(T) = \frac{1}{2}N_0$ ：

$$e^{-kT} = \frac{1}{2}$$

两边取对数，得到：

$$T = \frac{\ln 2}{k} \approx \frac{0.693}{k}$$

这就是半衰期公式。

例如碳-14 的半衰期约 5730 年，考古学家就用它来估算古物的年代。

四、 e^x 为什么“自然”

在所有指数函数 a^x 中，只有 e^x 的导数等于自己。

- 以 2 为底： $(2^x)' = 2^x \ln 2$ ，多了一个因子 $\ln 2$ ；

- 以 10 为底： $(10^x)' = 10^x \ln 10$ ，多了一个因子 $\ln 10$ ；
- 以 e 为底：因子是 $\ln e = 1$ ，刚好干净。

所以数学家和物理学家总喜欢把指数写成 e^{kt} 。它让“变化率”和“当前值”直接相等。

⚠ 坑一： e^x 不是 x^e

e^x 的底是 e ，指数是 x ； x^e 的底是 x ，指数是 e 。前者导数等于自己，后者要用幂法则。

⚠ 坑二： k 的符号决定增长还是衰减

e^{kt} 中 $k > 0$ 增长， $k < 0$ 衰减。看到 $e^{-0.2t}$ 就知道它在衰减。

⚠ 坑三：半衰期不是“活一半时间”

半衰期是数量减半所需的时间，不是“物品寿命的一半”。每个半衰期都减一半，永远不会真正到 0。

五、挑战

四关小挑战

- ① 求 $(e^{5x})'$ 。
- ② 求 $(e^{-x})'$ 。
- ③ 某物质半衰期 10 年， k 是多少（用 $\ln 2$ 表示）？
- ④ 初始 200 个细菌， $N(t) = 200e^{0.3t}$ ，2 小时后约有多少个？

▼ 看答案

- ① $5e^{5x}$ 。
- ② $-e^{-x}$ 。
- ③ $T = \frac{\ln 2}{k} = 10$ ，所以 $k = \frac{\ln 2}{10}$ 。
- ④ $200e^{0.6} \approx 200 \times 1.822 = 364.4$ ，约 364 个。

一句话记住

e^x 的高度就是它的斜率；增长和衰减，都写着 e^{kt} 。

e 与圆：欧拉公式

从增长到旋转

复数

欧拉公式

旋转

欧拉恒等式

🕒 约 13 分钟

动手玩 · 约 12 分钟



e 走进复平面

(在网页版打开可动手玩)

拖动角度 θ ，看指数在单位圆上转圈；走到 π ，亲眼看见欧拉恒等式。

欧拉把小 π 带到游乐场最深处的房间。

房间中央有一个圆盘，圆盘上有一根指针。指针的末端亮着一个小点，旁边写着：

$$e^{i\theta}$$

“这不是指数吗？怎么跑到圆上来了？”小 π 问。

“这就是这一章最漂亮的彩蛋。”欧拉说，“ e 本来在讲增长，可它一走进复数平面，就开始转圈了。”

一、先认识 i

我们熟悉的数都在数轴上：1, 2, -3, 0.5。

但有些方程在实数里没有解，比如：

$$x^2 = -1$$

数学家引入了一个新数 i ，规定：

$$i^2 = -1$$

于是 $x = i$ 和 $x = -i$ 都是 $x^2 = -1$ 的解。

有了 i ，就可以写出**复数**：

$$a + bi$$

其中 a 是实部， b 是虚部。复数可以画在平面上：横轴是实部，纵轴是虚部。

二、 e 的 $i\theta$ 次方

欧拉发现了一个惊人的关系：

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

右边正好是单位圆上的点：

- 实部 $\cos \theta$ ；
- 虚部 $\sin \theta$ 。

所以 $e^{i\theta}$ 的几何意义是：**单位圆上角度为 θ 的那个点**。

当 θ 从 0 增加到 2π ， $e^{i\theta}$ 就沿着单位圆逆时针转一整圈：

θ	$e^{i\theta}$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	i
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$-i$
2π	1

三、为什么指数会变成旋转

如果你把 $e^{i\theta}$ 按泰勒级数展开，会得到：

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$

把实部和虚部分开：

$$\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)$$

前面是 $\cos \theta$ 的级数，后面是 $\sin \theta$ 的级数。于是：

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

指数函数的级数，和三角函数的级数，在这里合二为一。

四、欧拉恒等式

令 $\theta = \pi$ ：

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0i = -1$$

移项：

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

这就是**欧拉恒等式**。

它把五个最重要的常数放在一起：

- 0：加法单位元；
- 1：乘法单位元；
- e ：自然增长；
- i ：虚数单位；
- π ：圆周率。

一条短短的式子，把增长、旋转、实数、虚数全部串了起来。很多人把它称为“数学中最美的公式”。

五、旋转的乘法

$e^{i\theta}$ 还有一个很好用的性质：

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

几何上，这就是“先转 α ，再转 β ，等于一次转 $\alpha + \beta$ ”。

第 2 章的和角公式，也可以从这里推出来：

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

而左边乘开：

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)$$

比较实部和虚部，就得到和角公式。圆、波、指数、复数，在这里全部会合。

⚠ 坑一：i 不是实数

i 不在实数轴上， $i^2 = -1$ 。不要把它当成“普通的字母”。

⚠ 坑二：角度用弧度

$e^{i\theta}$ 里的 θ 是弧度。 $e^{i\pi} = -1$ ，不是 e^{i180° 。

⚠ 坑三： $e^{i\theta}$ 在单位圆上

它的模长永远是 1： $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$ 。它只负责“转”，不负责“变大”。

六、挑战

四关小挑战

- ① i^2 等于多少？
- ② 写出 $e^{i\pi/2}$ 的值。
- ③ 用欧拉公式说明 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 。
- ④ $e^{i\theta}$ 的模长是多少？

▼ 看答案

- ① -1 。
- ② $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ 。
- ③ $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ ，所以 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 。
- ④ $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$ 。

一句话记住

$e^{i\theta}$ 是单位圆上的旋转； $e^{i\pi} + 1 = 0$ 是增长与圆的握手。

增长、旋转与最美的公式

把增长园装进口袋

总结

公式速查

自测

⌚ 约 9 分钟

从银行出来，小 π 手里拿着一张写着 e 的存单。

“所以 1 元钱无论怎么复利，一年后都不会超过 e 元？”

“对。”欧拉说，“而且 e 还会出现在细菌、放射性、冷却的咖啡里，最后甚至跑到圆上。”

小 π 回头看了一眼那扇写着 e 的门：“这一章，好像把前面三章都串起来了。”

“答对了。”

四张脸

e 有四张脸：

1. 复利的极限： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 。
2. 无穷级数： $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ 。
3. 指数函数： e^x 的导数等于自己。
4. 单位圆上的旋转： $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 。

它们看起来完全不一样，却说的是同一个数。

公式速查

内容	公式
e 的极限	$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
e 的级数	$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$
连续复利	$A = Pe^{rt}$
指数导数	$(e^x)' = e^x, (e^{kx})' = ke^{kx}$
增长/衰减	$N = N_0 e^{kt}$
半衰期	$T = \frac{\ln 2}{ k }$
欧拉公式	$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
欧拉恒等式	$e^{i\pi} + 1 = 0$

三种眼光

第一种：增长的眼光。 变化率和当前量成正比，就会长出 e^{kt} 。

第二种：计算的眼光。 用级数 $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$ 可以很快算出 e 。

第三种：旋转的眼光。 $e^{i\theta}$ 在单位圆上转，把指数、三角、复数连成一体。

自测

1. 复利次数 n 越大， $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 会无限变大吗？
2. e 的级数前 4 项是多少？
3. $(e^{3x})'$ 等于什么？
4. 半衰期 20 年， k 是多少？

5. $e^{i\pi}$ 等于多少?

挑战答案

4.1

- ① $1.25^4 \approx 2.4414$ 元。
- ② $100e^{0.2}$ 元。
- ③ 每次利率变小，增长越来越慢，极限有限。
- ④ 都是无限不循环小数，都不能写成分数。

4.2

- ① 24, $\frac{1}{24}$ 。
- ② $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$ 。
- ③ 约 2.7083。
- ④ 分母 $n!$ 增长得越来越快。

4.3

- ① $5e^{5x}$ 。
- ② $-e^{-x}$ 。
- ③ $k = \frac{\ln 2}{10}$ 。
- ④ 约 364 个。

4.4

① -1 。

② i 。

③ $e^{i\pi} = -1$ ，所以 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 。

④ 1 。

■ 全书回顾

从第 1 章的数字排队，到第 2 章的圆与波，到第 3 章的变化率，再到第 4 章的增长与旋转，我们其实一直在做同一件事：

用不同的眼睛，看同一个世界。

数字可以排列、折叠、堆成形状；圆可以展开成波；变化可以变成斜率；增长可以写成 e ；而 e 最终又回到圆上。

小 π 把存单折好，放进兜里。

“下一册，我们去哪里？”

欧拉指了指游乐场外面：“去一个更大的地方。那里有无限、有概率，还有更多看起来毫不相干、最后却握手的数。”

第一册，完。

挑战答案与公式速查

卡住的时候再翻，不卡就别翻

答案

公式表

术语

⌚ 约 5 分钟

这份附录有两个用途：对答案，和查公式。建议先自己做完，再翻。

1.1 高斯的一记神配对

① $1 + 2 + \cdots + 99$

$$\frac{99 \times 100}{2} = 4950$$

② $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$

提取公因数 2: $2(1 + 2 + \cdots + 50) = 2 \times \frac{50 \times 51}{2} = 2550$ 。

③ $1 + 2 + \cdots + n = 2016$, 求 n

$n(n+1) = 4032$ 。估算 $63 \times 64 = 4032$, 所以 $n = 63$ 。

1.2 越变越小的饼干

① $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$

首项 1, 公比 $\frac{1}{3}$, 所以 $\frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$ 。

② $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{10}$

有限等比数列, 首项 1, 公比 2, 共 11 项: $\frac{1-2^{11}}{1-2} = 2047$ 。

③ $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

公比是 $-x$ ，所以 $S = \frac{1}{1+x}$ 。

1.3 方块堆里的秘密

① 10×10 网格里的正方形总数

$$\frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$$

② $1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3$

$$T_{10} = 55, \quad 55^2 = 3025。$$

③ $1^4 + 2^4 + \cdots + 10^4$

$$\frac{10 \times 11 \times 21 \times 329}{30} = 25333$$

1.4 素数的筛子与森林

① 100 以内的素数个数

25 个。

② 101 和 221 是不是素数

101 是素数（试到 $\sqrt{101} \approx 10$ ，2、3、5、7 都除不尽）； $221 = 13 \times 17$ ，不是素数。

③ 100 以内的孪生素数对

8 对：(3,5)、(5,7)、(11,13)、(17,19)、(29,31)、(41,43)、(59,61)、(71,73)。

④ $2^{31} - 1$ 是不是素数

是。它是一个梅森素数，等于 2147483647，也是 32 位有符号整数能表示的最大素数。

公式速查表

名称	公式	条件
等差数列求和	$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$	n 为正整数
自然数求和	$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	n 为正整数
等比数列有限和	$1 + x + \cdots + x^N = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$	$x \neq 1$
等比数列无限和	$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$	$ x < 1$
奇数和	$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$	n 为正整数
平方和	$1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	n 为正整数
立方和	$1^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$	n 为正整数
四次方和	$1^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$	n 为正整数
素数定理	$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$	n 很大时

术语小词典

等差数列：相邻两项的差固定的数列，如 1、3、5、7。

等比数列：相邻两项的比固定的数列，如 1、2、4、8。

公比：等比数列里固定的那个倍数，通常记作 q 或 x。

三角形数： $T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ，因为可以摆成三角形。

正方形数： n^2 ，可以摆成正方形。

素数：大于 1，且只有 1 和自身两个正因数的整数。

合数：大于 1，但不是素数的整数。

$\pi(n)$ ：不超过 n 的素数个数，读作“pi n ”。注意它和圆周率 π 不是一回事。

孪生素数：相差 2 的素数对，如 11 和 13。

望远镜求和：形如 $(k+1)^p - k^p$ 的差分逐项相加，中间项成对抵消，只剩首尾。

收敛：随着项数增加，和越来越接近某个固定的数。

卡迈克尔数：能骗过费马小定理的合数，如 561、1105、1729。

继续往前走

如果你还想过瘾，可以试试这些：

- 用筛法找出 10000 以内的素数，数一数 $\pi(10000)$ 是多少。
- 用公式计算 $1^5 + 2^5 + \cdots + n^5$ ，自己动手推一遍（提示：六次方差分）。
- 在乌岚螺旋里找出最长的一条“素数斜线”，看看它对应哪个二次多项式。
- 查一查“哥德巴赫猜想”：每个大于 2 的偶数，是不是都能写成两个素数之和？

数学的世界很大。这一章只是游乐场的入口。

小 π 说：“下一章见。” 欧拉说：“先把票根收好。”